TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. **P_MSS_1029_V**

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

V

MSS·CON.
GIORDAN.
RICCATI
ARIT·GEO
ANAL.

1029

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1029 V

Dissertazioni, e scritti
Aritmetici,
Geometrici, Analitici
inediti
del Conte Giordano Riccati

Indice delle cose contenute in questo Volume.

1. modo per dividere in due ragioni eguali una data ragione pag. - 3.
2. Del giuoco di Barzone - - - - - - - - - - 19.
3. Problema. Dato il frutto, che ricava il Monte etc. - - - 37.
4. Probl. Sia il capitale (a) che rende il frutto etc. - - - 49.
5. Riflessioni sopra la Regola di doppia falsa posizione - - 61.
6. Metodo I. di determinare i quadrati tutti, che sono eguali a due quadrati - - - - - - - 73.
7. Metodo II. di determinare in numeri interi i quadrati, che sono eguali a due quadrati - - - - - - 85.
8. Metodo per determinare tutti i triangoli etc. - - - - 91.
9. Probl. Dato un numero intero non quadrato etc. - - - 99.
10. Probl. Determinare gl'infiniti sovraggi di numeri interi - - 111.
11. Soluzione di un Problema aritmetico - - - - - - - 119.
12. Soluzione del Probl. proposto dal Sig. Sarti Maestro di Musica 131.
13. Problema. Dato l'angolo acuto ABC etc. - - - - - 145.
14. Dati tre circoli di posizione, i cui raggi siano ineguali determinare un cerchio, che li tocchi tutti tre - - 161.
15. In un dato cerchio inscrivere un triangolo etc. - - 169.
16. Problema geometrico - - - - - - - - - - 179.
17. Soluzione del Probl. proposto dalla Sig. Clelia Grillo - - - 187.
18. Soluzione di due Probl. geometrici - - - - - - - 203
19. Soluzione di un Probl. geometrico - - - - - - - 223.
20. Dimostrazione di un Teorema geometrico - - - - 235.
21. Probl. inscrivere un eneagono nel cerchio - - - - 251.
22. Della Cicloide, e delle sue proprietà - - - - - - 263.
23. Della Lemniscata, e sue proprietà - - - - - - 273.
24. Determinare la curva AJD etc. - - - - - - - 295.
25. Probl. Dato un circolo, ed una retta fuori di esso etc. 305.
26. Lettera contenente alcune riflessioni etc. 327.
27. Probl. trovare nella Spirale Iperbolica etc. 345.

Indice delle cose contenute in questo Volume

1. Modo per risolvere in [illegible] equazioni [illegible] pagina 1.
2. Del giuoco di [illegible] 19.
3. Problema. Dato il [illegible], che viene il [illegible] etc. 27.
4. Probl. [illegible] (a) che [illegible] etc. 49.
5. Riflessioni intorno la figura della [illegible] posizione 61.
6. Metodo 1. di determinare i quadrati, che sono uguali a tre quadrati 73.
7. Metodo 2. di determinare in numeri interi i quadrati, che sono uguali a tre quadrati 85.
8. Metodo per determinare tutti i triangoli etc. 91.
9. Probl. Dato un numero intero non quadrato 99.
10. Probl. Determinare [illegible] numeri interi 111.
11. Maniera di un Problema [illegible] 119.
12. Maniera del Probl. proposto [illegible] 131.
13. Problema. Dato l'angolo [illegible] etc. 143.
14. Dati tre circoli di posizione, i cui raggi [illegible], descrivere un circolo, che li tocchi tutti tre 155.
15. In un dato circolo inscrivere un triangolo etc. 159.
16. Problema geometrico 179.
17. Soluzione del Probl. proposto [illegible] 187.
18. Soluzione di due Probl. geometrici 203.
19. Soluzione di un Probl. geometrico 217.
20. Dimostrazione di un Teorema geometrico 231.
21. Probl. Inscrivere un [illegible] nel circolo 251.
22. Della [illegible] e sue proprietà 263.
23. Della [illegible] e sue proprietà 273.
24. Determinare [illegible] etc. 295.
25. Probl. [illegible] circolo [illegible] 305.
26. Lettera contenente alcune riflessioni etc. 327.
27. Probl. [illegible] etc. 345.

28. Modi di delineare meccanicamente le sezioni del cono - - - 359.

29. Soluzione della difficoltà proposta dal Galileo - - - - - - 371.

30. Soluzione meccanica della formula $x^3 - px - q = 0$

31. Esame del metodo, col quale il Sig. Edmondo Halley crede di aver ridotte l'equazioni ecc. - - - - - - - - - 405.

32. Riflessioni circa la formula $(a+b\sqrt{-1})^m = (a-b\sqrt{-1})^m$ 423.

33. Maneggio della formula $a = \sqrt[3]{(-u+\sqrt{(u^2-1)})}+\sqrt[3]{(-u-\sqrt{(u^2-1)})}$ 431.

34. Riflessioni sopra la prova del Sig. Ab. Zelizzari - - - - - - 439.

35. Rettificazione della Logistica - - - - - - - - - 467.

36. Esame del Probl. sciolto dal Sig. Ab. Zeccari - - - - - 475.

37. Integrazione della formula $dt = \frac{\sqrt{m}.x\,dz}{a\sqrt{(z^3-p^3)}}$ - - - - - - 511.

38. Soluzione del Probl. proposto dal S. Vincenzo Riccati - - - - 515.

39. Uso del metodo delle variazioni - - - - - - - 533.

40. Osservazioni sopra l'equazioni lineari di limite del Sig. D. Nicolai - - - - - - - - 559.

Dissertazioni, e Scritti

Aritmetici.

Della Divisione delle Ragioni
in un determinato numero
di Ragioni eguali.
Dissertazione Aritmatica
del Signor Conte
Giordano Riccati.

Metodo per dividere in due ragioni eguali una data ragione.

Debbasi dividere in due ragioni eguali la ragione 1:2, ossia 2:4. Tra i numeri 2, 4 ci pongo il medio aritmetico 3, ed osservo che la ragione $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ supera il binario per l'unità divisa per 4. Stando 6 : 9 :: 2 : 3, calando il 9 per $\frac{1}{2}$, avremo la ragione 6 : $8\frac{1}{2}$ :: 12 : 17, ovvero $\frac{17}{12}$, che molto si accosterà alla media geometrica tra 1 e 2, ch'è quanto a dire a $\sqrt{2}$. Ora essendo $\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144}$, e 17 : 12 :: 289 : 204, e superando $\frac{289}{144}$ il binario per l'unità divisa per 144, si accosterà molto a $\sqrt{2}$ la ragione $\frac{288\frac{1}{2}}{204} = \frac{577}{408}$. Alzata anche questa ragione al quadrato, trovo $\left(\frac{577}{408}\right)^2 = \frac{332929}{166464}$, che eccede il 2 per $\frac{1}{166464}$. Poichè 577 : 408 :: 332929 : 235416, la ragione $\frac{332928\frac{1}{2}}{235416} = \frac{665857}{470832}$ s'avvicinerà più strettamente a $\sqrt{2}$. In fatti elevandola al quadrato si trova $\left(\frac{665857}{470832}\right)^2 = \frac{443365544449}{221682772224}$, che supera il binario per la minuzia $\frac{1}{221682772224}$.

Stimo necessario l'avvertire, che quando si tratta di ragioni lontane, piuttostochè il collocare tra i due numeri una media aritmetica, tornerà meglio l'estrarre la radice più prossima dal prodotto dei due numeri, aggiungendovi il

Della divisione delle ragioni in un determinato numero di ragioni eguali.

La trattazione di questa materia riuscirà più chiara, cominciando dai casi più semplici e passando gradatamente ai più composti.

il residuo al quadrato; calcolando il di più diviso pel doppio della radice.

Si voglia per esempio dividere in due parti eguali la ragione 2 : 9; la radice più prossima del prodotto 18 sarà 4, e calando per 2 il quadrato 16 da 18, vi aggiungo $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Tra 2; 9 vi pongo adunque $4\frac{1}{4}$, onde avrò 2; $4\frac{1}{4}$; 9, ovvero 8, 17, 36. Alzo al quadrato la ragione $\frac{17}{8}$, e trovo $\left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$. Facciasi 2 : 9 :: 64 : 288, e si comprenderà, che la ragione $\frac{289}{64}$ supera la $\frac{9}{2}$ per $\frac{1}{64}$. Poichè 17 : 8 :: 289 : 136, s'inferisca, che la ragione $\frac{288\frac{1}{2}}{136} = \frac{577}{272}$ si accosterà moltissimo a $\frac{\sqrt{18}}{2}$. E voglia il vero elevandola al quadrato avremo $\left(\frac{577}{272}\right)^2 = \frac{332929}{73984}$, e facendo 2 : 9 :: 73984 : 332928, ne raccoglieremo, che la ragione $\frac{332929}{73984}$ cresce sopra $\frac{9}{2}$ per $\frac{1}{73984}$. Continuando lo stesso metodo si perverrebbe a sempre maggiore esattezza.

Metodo per dividere in tre ragioni eguali una data ragione.

Venga proposto di dividere in tre ragioni eguali la ragione 1 : 2 = 3 : 6. Tra i numeri 3; 6 vi colloco i due medij aritmetici 4, 5, e mi si presenta la serie 3, 4, 5, 6. La ragione $\frac{5}{4}$ è minore di $\sqrt[3]{2}$; imperciocchè alzata al cubo mi dà la quantità $\frac{125}{64} < 2 = \frac{128}{64}$

Poichè $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$, ne segue che $\frac{126}{100} = \frac{63}{50}$ sarà una mica maggiore di $\sqrt[3]{2}$. Infatti elevando la detta ragione al cubo, ne risulta $\frac{250047}{125000}$, che supera il 2 per $\frac{47}{125000}$ = pros.te $\frac{1}{2660}$. Stando $63 : 50 :: 250047 : 198450$, ed essendo in numeri interi 15 la terza parte di 47, e $47 - 15 = 32$, avremo adequatamente $\sqrt[3]{2} = \frac{250032}{198450} = \frac{125016}{99225}$. Si alzi una tal ragione alla terza potestà, e ne nascerà $\left(\frac{125016}{99225}\right)^3 = \frac{1953875096004096}{976929722015625}$. Cresce questa sopra il 2 per la piccolissima differenza $\frac{15651972846}{976929722015625}$ = pros.te $\frac{1}{62416}$. Se avessi posto $\sqrt[3]{2} = \frac{250031}{198450}$, avrei trovato $\left(\frac{250031}{198450}\right)^3 = \frac{15630813220779791}{7815437776125000}$. Un tal valore cala dal 2 per la menomissima differenza $\frac{62331470209}{7815437776125000}$ = pros.te $\frac{1}{125385}$, ch'è la metà in circa della precedente. S'immagini essere il valore fisicamente giusto di $\sqrt[3]{2} = \frac{250031\frac{1}{3}}{198450}$. In questa ipotesi, trascurate le frazioni, si scoprirebbe $\left(\frac{250031\frac{1}{3}}{198450}\right)^3 = \frac{15630875737114096}{7815437776125000}$ grandezza, che supera il 2 per $\frac{184864096}{7815437776125000}$ = pros.te $\frac{1}{42276666}$.

Se la ragione proposta fosse lontana, farebbe di uopo preferire alla due medie aritmetiche di estrazione prossima della terza radice del prodotto dai due numeri dati. S'alzi una tal radice al cubo, e secondochè questo è minore, o maggiore del detto prodotto, il residuo, o il di più diviso pel triplo del quadrato della radice si aggiunga, o si levi dalla radice stessa, e ne proverrà una nuova radice, che si accosterà molto alla giusta. Postochè la ragione fosse 1 : 9, la radice cubica prossima del 9 sarebbe 2, il cui cubo è superato dal 9 per 1. Questo residuo si divida per 3·4 = 12, e la frazione $\frac{1}{12}$ si aggiunga a 2, onde s'abbia la radice $2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$, che s'avvicina molto all'esatta, e che si renderà più accurata coll'ajuto del metodo, che ho insegnato.

Metodo per dividere nel numero n di ragioni eguali una data ragione.

Colla scorta dei due descritti metodi si può agevolmente pervenire a dividere nel numero n di ragioni uguali una ragione proposta. Sarà più sicuro di anteporre alla media aritmetica la più prossima radice n estratta dal prodotto dei numeri dati. S'estolla questa radice alla potestà n, e se cotal potestà è minore di esso prodotto, si aggiunga alla radice il residuo diviso pel numero n moltiplicato nella potestà

n−1

$n-1$ d'essa ~~ragione~~ dica. Che se la potestà n della radice fosse maggiore del mentovato prodotto; dovrebbe sottrarsi dalla radice la differenza divisa per n moltiplicato nella potestà $n-1$ della predetta radice. Sia per esempio $n=2$, e si voglia dividere la ragione $1:2$ per metà. La radice prossima di 2 è 1, il cui quadrato 1 differisce da 2 per 1. Si dee dunque aggiugnere ad 1 la frazione $\frac{1}{2}$, onde ne risulti la radice $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, che è quella stessa, che nel nostro caso ci è stata suggerita dalla media aritmetica fra 1 e 2. Ma se $1:5$ fosse la ragione prescritta da partirsi in due uguali ragioni; la media aritmetica 3 mi darebbe la ragione $1:3$, il cui quadrato $1:9$ si allontanerebbe moltissimo dalla proposta ragione $1:5$. Al contrario la radice prossima del 5 sarebbe $2+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$, ed il suo quadrato $\frac{81}{16} = 5\frac{1}{16}$ si accosterebbe al 5 non poco. Seguendo poscia la traccia del primo metodo, si determinerà quella frazione, il cui quadrato fisicamente si adegua a 5.

Trovata nella descritta maniera la prossima radice n del prodotto dei numeri dati, ~~viene~~ per ridur questa ad una scrupolosa esattezza, si mettano in opera gli artifici analoghi a quelli, che nei precedenti metodi ho suggeriti.

Metodo per dividere in sei
ragioni eguali il Comma
ossia la ragione 80 : 81.

La Divisione del Comma in tre parti ha dato motivo al Dottissimo P. D. Alessandro Barca di comporre la bella Dissertazione, il cui titolo <u>Nuovi Teoremi per la Divisione delle Ragioni</u>. Per ottenere coi miei metodi la terza parte, moltiplico per 6 i due numeri 80, 81, e vi pongo frammezzo cinque medie aritmetiche, onde si abbia la serie 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486. La ragione 482 : 484 ossia 241 : 242 è prossimissimamente la terza parte del Comma; e voglia il vero alzandola alla terza potestà, ne proverranno i numeri 13997521; 14172488. Ma essendo 80 : 81 :: 13997521 : 14172490 $\frac{1}{80}$ ed il quarto termine sarebbe il maggiore dei numeri sovrascritti soltanto per 2 $\frac{1}{80}$. Si osservi essere $241 \cdot (242)^2 : (242)^3 :: 241 : 242$; dunque fatti gli opportuni calcoli 241 : 242 :: 14113924 : 14172488. A questo ultimo numero si aggiunga la terza parte della trovata differenza 2 $\frac{1}{80}$, cioè $\frac{161}{240}$, e la ragione 14113924 : 14172488 + $\frac{161}{240}$ esprimerà con fisica esattezza la terza parte del Comma.

Tra i numeri esprimenti la terza parte del Comma si ponga il medio aritmetico 14143206 $\frac{161}{480}$, ed accaderà, che dalla ragione
14113924 : 14143206 $\frac{161}{480}$

venga

venga molto ~~[illegible]~~ di la sesta parte del Comma. Ci convinceremo di una tal verità elevando il numero 141432061 $\frac{161}{440}$ al quadrato, ~~la detta~~ ragione, onde ne risultino ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $=(14\ldots)^2$

$20003024544617\ldots \frac{...}{440} = \left(141432061\frac{161}{440}\right)^2$

~~Instituiscasi la seguente analogia~~

~~[illegible] $\frac{161}{440}$~~

Moltiplicando [illegible] i seguenti numeri indicanti la ragione della terza parte del Comma, avremo il prodotto

~~[illegible]~~ $\left(141724\ldots + \frac{161}{240}\right)$

$\times\, 141139\ldots$

$20002942\ldots \frac{161}{240}$ *

~~[illegible] $\frac{161}{440}$~~

~~[illegible] $\left(\ldots\frac{161}{440}\right)^2$~~:

~~$\left(\ldots\frac{161}{440}\right)$ [illegible]~~ $=$

~~[illegible] $\frac{...}{480}$~~ :

~~[illegible]~~ :

~~$1\ldots\frac{161}{440}$~~

~~[illegible] $\frac{161}{440}$~~ :

~~[illegible]~~ $\frac{161}{440}$;

~~ma abbiamo [illegible]~~. La differenza tra il quadrato, ~~ed~~ il rettangolo ultimamente trovati s'eguaglia a $4532455107\,\frac{109}{240}$. Si divida questa per $\left(141432061\frac{161}{440}\right)\cdot 2$ $= 282864122\,\frac{322}{440}$ ne risulterà il quoziente $= 30 + \frac{150}{440}$, il quale dee sottrarsi da $141432061\,\frac{161}{440}$, onde l'aggiustatissimo valore della sesta parte del Comma si esprima ~~per la ragione~~ $1411\ldots 3\cdot 9\,24\ldots : 14143171\ldots\frac{11}{440}$

* che dovrebbe esser uguale al sovrascritto quadrato, se si fosse determinata con esattezza la sesta parte del Comma.

Se faremo $4462\frac{1}{2} : 4463\frac{1}{2} :: 965 : 967 :: 1411392 4 : \frac{967 \cdot 14113924}{965}$

$= 14143177 \cdot 5 \frac{633}{965}$ ci accorgeremo quanto la ragione diminuita $\frac{1}{6}$ di Comma si accosti a quella di $965 : 967$.

Osservazione.

Col Metodo, che insegna a dividere nel numero n di ragioni uguali una data ragione si ottiene certamente l'intento; ma se il numero n è grande, e primo, si presentano computi, che superano la più tollerante pazienza. Chi si metterà mai all'impresa di elevare una ragione alla potestà 19, 31, o 43.? Per questo motivo ai numeri sono stati sostituiti i logaritmi. Il Sistema musico temperato di Cristiano Ughenio divide la ragione 1 : 2 chiamata Ottava in parti 31. Si divida dunque il logaritmo dell'Ottava in 31 parti; e perchè con dieci di queste parti si compone la Terza maggiore, la cui ragione $\frac{5}{4}$, la quale in logaritmi si agguaglia a log. 5 − log. 4, con tale logaritmo si paragoni l'aggregato delle dieci parti, e si comprenderà, che in detto Sistema la Terza maggiore temperata è prossiche giusta. Lo stesso esame si può fare delle altre consonanze temperate paragonando i loro divarj dalle consonanze esatte col logaritmo del Comma = 53950

= 53950, per sapere la porzione di Comma, per cui s'allontanan dal giusto.

Del Risco di Fassone.

1

	Banchiere		Mettitore	
	Tagli	utile	Tagli	utile
1	24	24·½a	0	0
2	4·24	8·24·a	4·24	8·24·a
	12·24	6·24·a		
	2·24	1·24·a		
	22·24	15·24·a	4·24	8·24·a

1 Si hanno quattro carte tutte disuguali, le quali a quattro a quattro si possono in 24 maniere combinare. Volendo che mettendo un solo punto per taglio; il Banchiere ha fare [illegible] tutte le 24. combinazioni ciascuna delle quali gli [illegible] l'utile di $(\frac{1}{2}a)$, chiamata a la posta. La probabilità del Banchiere, e del Mettitore staranno come $24\cdot\frac{1}{2}a : 0$, ed [illegible] ~~vincendo~~ [illegible] 24. volte vincerà la metà avrà il lucro $\frac{12a}{24} = \frac{1}{2}a$.

---

2 Abbiansi sei carte, due indifferenti, i quattro segnanti, [illegible] voglia tentare un solo punto con segni. Le carte indifferenti colle segnanti si combinano in 16 modi a due a due, otto favorevoli a chi taglia, ed altrettanti a chi mette. Ognuno di questi [illegible] cada in prima sede, e rimanendo quattro carte, che a quattro a quattro si combinano in 24 maniere, avremo [illegible]

Se due carte non segnanti, e l'altra né non cadono in prima sede, venga ora occupata da due carte segnanti. Le quattro carte di tal maniera si possono accoppiare a due a due in sei maniere; e perché restano quattro carte, le totali combinazioni saranno in 24, da ognuna delle quali potrà a chi taglia l'utile di mezza posta. [illegible] Dunque — — —

Resta che possano riuscire in prima sede le carte non segnanti, le quali mi danno —

20

Si avrà la conseguenza, che le probabilità stanno come

$15.244a : 4.244a :: 15 : 8$:

Restando inoltre dei taglia col vantaggio di 7 sotto in 30, il suo lucro sarà $\frac{7}{30}$.

Si chiami m tutto il numero delle carte, ed n quello delle carte significanti, e le sovrapposte quantità si esprimeranno [illegible]

cioè
$$5.244a = \overline{m-n}.n \times \overline{m-2}.\overline{m-3} \ldots 1.a$$
$$6.24a = n.\overline{n-1} \times \overline{m-2}.\overline{m-3} \ldots 1.\tfrac{1}{2}a$$
$$1.24a = \overline{m-n}.\overline{m-n-1} \cdot \frac{\ldots}{n.\overline{n-1}\ \overline{m-4}.1.\tfrac{1}{2}a}$$
) [illegible]

$$5.244a = \overline{m-n}.n \times \overline{m-2}.\overline{m-3} \ldots 1.a$$ = [illegible]

Il numero intero delle combinazioni [illegible] o [illegible] si esprime [illegible]

$m.\overline{m-1} \ldots n.\overline{n-1} \ldots 1$

3 Si siano otto carte quattro indifferenti ed altrettante significanti, e si voglia considerare un solo punto nel taglio. Le carte indifferenti colle significanti si combinano a due a due in 16 modi svantaggiosi a chi taglia, ed in altrettanti vantaggiosi di [illegible]. Essendo di tali modi ciascuno in prima sola, e vi mancando sei carte, che a sei a sei si combinano in 720 maniere, avremo — — —

Si avrà una carta sopra

$$18.720a = \overline{m-n}.n \times \overline{m-2}.\overline{m-3} \ldots 1.a$$

Non cadendo le dette combinazioni in prima sola, venga [illegible] da due carte significanti. Da queste tutte si [illegible] seguenti combi[illegible]

Tagliatori [illegible] Metti[illegible]

Tagli Utile Tagli Utile

16.720a 18.720a 18.720 18.720

18.720 8.720a

Anche un tal numero si esprime generalmente come segue

$6.720 = n.\overline{n-1} \times \overline{n-2}.\overline{n-3} \ \&c.\ 1.\frac{1}{2}$

~~Le quattro carte~~ significanti in giuoco ~~nelle quattro~~ nelle due prime sedi, e succedendovi di ciò, ne collocheranno ~~due~~ quelle e

l'inganno in prima sede due carte non significanti, o giacchè le quattro carte indifferenti si ponno combinare a due a due in modi

$12 = \overline{m-n}.\overline{m-n-1}$ e le
Durante le due non che stanno in prima sede, rimanenti sei, in modi

$720 = \overline{m-2}.\overline{m-3}\ \&c.\ 1$

avremo combinazioni

num° 12.720 nelle quali due carte indifferenti stanno in prima sede. Bisogna levare fra queste combinazioni quelle ... Taglierini, o quali al Mattatore ...

Le rimanenti 6 carte si combinano a due a due in 30 maniere, fra le quali vi sono 4 binarj di carte significanti e indifferenti, 4 binarj di carte indifferenti e significanti, 2 binarj di carte indifferenti, e 12 binarj di giacchette. Avverto che nei due binarj di carte indifferenti si seguitano nella rimanente le giacchette. Quindi delle 30 combinazioni ne porta 24, onde 30.24 = 720 tanto l'inganno

Bandiere	Tagli	Vale	Tagli	Si trova
16.30.24	16.30.24a	16.30.24	16.30.24a	
12.30.24	12.30.24.½			
12.8.24	12.8.24a	12.8.24	12.8.24a	
12.2.24	12.2.24.½			
12.12.24	12.12.24.½			

Dalle ricomposte [illegible] che le probabilità stanno come 440 : 576 : : 35 : 24. Il luogo [illegible] si scioglie

1104.24 440.24a 576.24 ; 576.24a

a $\frac{264.24a}{1840.24a} = \frac{11}{76}$

22.

Non ... in. 6. 24 a =

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times\overline{m-n-2}\cdot n\times\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.a$,

in 2. 24. $\frac{1}{2}a$ =

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times\overline{m-n-2}\cdot\overline{m-n-3}\times \overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.\frac{1}{2}a$ ~~$\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.\frac{1}{2}a$~~ $n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-6}\ \&\ 1.\frac{1}{2}a$,

n. in. 24. $\frac{1}{2}a$ =

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times n\cdot\overline{n-1}\times\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.\frac{1}{2}a$

Vincita del Banchiere

$\overline{m-n}\cdot n\times\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\ \&\ 1.1.a$

$+\,n\cdot\overline{n-1}\times\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

$+\,\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times\overline{m-n-2}\cdot n\times\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.a$

$+\,\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot n\cdot\overline{n-1}\times\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

$+\,\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times\overline{m-n-2}\cdot\overline{m-n-3}\times$ ~~$\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$~~ $n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-6}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

Vincita di chi mette

$\overline{m-n}\cdot n\times\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\ \&\ 1.1.a$

$+\,\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\times\overline{m-n-2}\cdot n\times\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.a$

4 Dopo ciò si ha qual che basti per determinare le formole negli altri casi. Se le carte indifferenti son sei, e le significanti quattro, avremo

Vincita del Banchiere ...... Vincita di chi mette

$\overline{m-n}\cdot n\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\ \&\ 1.1.a$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot\overline{m-n-2}\cdot n\cdot\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.a$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot\overline{m-n-2}\cdot\overline{m-n-3}\cdot\overline{m-n-4}\cdot n\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.a$,

$n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot\overline{m-n-2}\cdot\overline{m-n-3}\cdot n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-6}\cdot\overline{m-7}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\ldots 5\cdot\overline{m-n-5}\cdot$ ~~$\overline{m-6}\cdot\overline{m-7}$~~ $n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-6}\ \&\ 1.1.\frac{1}{2}a$.

Soggiungo il computo quando le carte tutte sono sei e le significanti 4. Faccio il solo calcolo dei casi, che in egual numero sono favorevoli ai due giocatori, quando le carte sono una significante e l'altra no. Dal detto calcolo per ricavare facilmente, le probabilità dei giocatori, ed il lucro del Banchiere.

Calcolo quando tutte le [illegible] sono sin, e le seguitanno a 23

48 · 2 · 50 · 49 · 48 ℓ — — 1·2 · 470402

48 · 47 · 46, 2 · 46 · 47 ℓ — — 1·2 = 415104

48 · 47 · 46 · 45 · 44 · 2 · 45 · 45 ℓ . . . 1·2 = 364320

48 · 47 · 46 · 45 · 44 · 43 · 42 · 2 · 44 · 43 ℓ — 1·2 = 317856

48 · 47 ℓ — 42·41 · 40 · 2 · 42 · 41 ℓ — 1·2 = 275520

48 · 47 ℓ — — 39 · 38 · 2 · 40 · 39 ℓ · 1·2 = 237120

48 · 47 ℓ — — 37 · 36 · 2 · 38 · 37 ℓ · 1·2 202464

48 · 47 ℓ — — 35 · 34 · 2 · 36 · 35 ℓ 1·2 = 171360

48 · 47 ℓ — 33 · 32 · 2 · 34 · 33 ℓ · 1·2 = 143616

48 · 47 ℓ — 31 · 30 · 2 · 32 · 31 ℓ · 1·2 = 119040

48 · 47 ℓ — — 29 · 28 · 2 · 30 · 29 ℓ · 1·2 = 97440

48 · 47 ℓ — — 27 · 26 · 2 · 28 · 27 ℓ · 1·2 = 76824

48 · 47 ℓ — 25 · 24 · 2 · 26 · 25 ℓ · 1·2 62400

48 · 47 ℓ — — 23 · 22 · 2 · 24 · 23 ℓ · 1·2 = 46536

48 · 47 ℓ — — 21 · 20 · 2 · 22 · 21 ℓ · 1·2 = 36960

48 · 47 ℓ — — 19 · 18 · 2 · 20 · 19 ℓ · 1·2 = 27360

48 · 47 ℓ — — 17 · 16 · 2 · 18 · 17 ℓ · 1·2 = 19344

48 · 47 ℓ — — 15 · 14 · 2 · 16 · 15 ℓ · 1·2 13440

48 · 47 ℓ — — 13 · 12 · 2 · 14 · 13 ℓ · 1·2 = 8736

48 · 47 ℓ — — 11 · 10 · 2 · 12 · 11 ℓ · 1·2 = 5280

48 · 47 ℓ — — 9 · 8 · 2 · 10 · 9 ℓ · 1·2 = 2640

48 · 47 ℓ — — 7 · 6 · 2 · 8 · 7 ℓ · 1·2 = 1344

48 · 47 ℓ — — 5 · 4 · 2 · 6 · 5 ℓ · 1·2 = 460

48 · 47 ℓ — — 3 · 2 · 2 · 4 · 3 ℓ 1·2 46

48 · 47 ℓ [illegible]

3120000ab

Osservo che tutti i termini sono moltiplicati per la serie 48 · 47 · 3 · 2 · 1 = 6. A questi numeri si nota una linea sotto. Avverto essere il numero delle combinazioni 52 · 51 · 50 · 49 · ab = 6497400ab

Un egual numero di casi 3120000 ab è favorevole ai due giocatori. Si duplichi questo numero e il sottragga dal totale numero delle combinazioni 6497400 ab ; ond' si avrà il residuo 257400 ab. Dividasi in due parti eguali ~~[illegible]~~ e la metà 128700 ab si aggiunga alla parte del Banchiere a ragion dell' utile delle [illegible], e ne risulterà la somma 3248700 ab. Quindi le probabilità saranno

come 3245700 : 3120000, ossia prossimamente come 25 : 24.

Il lucro poi del Banchiere si ragguaglia a $\frac{1215700\,a}{64972400} = \frac{33\,a}{10000}$ è prossimamente $= \frac{2a}{101}$

Con poca varietà si trovano le formole, quando le carte significanti sono [illegible]. Tutto il divario consiste in ciò, che l'ultimo termine indicante la vincita del Banchiere, quando le carte significanti occupano l'ultimo luogo, il quale se le carte [illegible] sono n, va moltiplicato [illegible] per [illegible], nel nostro caso si deve moltiplicare per [illegible], a motivo che le [illegible] in questa sede portano al Banchiere il lucro della metà la posta

Carte indifferenti 2, significanti 2

Vincita del Banchiere — del Mettitore

$n \cdot \overline{n-1} \cdot a = 2a$ — 0

Probabilità

$2a$: 0

Lucro del Banchiere

$\frac{a}{2}$

Carte indifferenti 2, significanti 2

Vincita del Banchiere — del Mettitore

$m-n \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot$ [illegible] $\cdot 1 \cdot a = 4a$ — $\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot 1 \cdot a = 4a$

$n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-2} \cdot$ [illegible] $\cdot 1 \cdot \frac{1}{2}a = 2 \cdot a$

$\overline{m-n} \cdot \overline{m-n-1} \cdot$ [illegible] $= 4 \cdot a$

$n \cdot \overline{n-1} \cdot a$ Probabilità [illegible]

[illegible] 4

Numero totale delle combinazioni

$m \cdot \overline{m-1} \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Lucro del Banchiere

$\frac{6a}{24} = \frac{a}{4}$

Casi [illegible] a vincere il
Banchiere del Mercante

$\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $= 192a$ $\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $= 192a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-2} \cdot n \cdot \overline{m-4} \cdot 1 \cdot a = 96a$ $\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n} \cdot 2 \cdot n \cdot \overline{m-4} \cdot 1 \cdot a = 91a$

$n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $\frac{1}{2}a = 24a$ [illegible] $24a = 288a$

$\overline{m-n} \cdot \overline{m-n-1} \cdot n \cdot \overline{n-1}$

$\overline{m-4}$ [illegible] $\frac{1}{2}a = 24a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-3} \cdot n \cdot \overline{n-1}$ [illegible] $a = 48a$

$384a = 16 \cdot 24a$

Probabilità

4 : 3

Numero totale delle combinazioni

[illegible] $= 30424$

Lucro del Banchiere

$\frac{2a}{15}$

Casi [illegible] a vincere il
Banchiere

Si [illegible] la [illegible] $= 12\,6a$

$\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $1 \cdot a = 63a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-2} \cdot n \cdot \overline{m-4} \cdot \overline{m-5}$ [illegible] $1 \cdot a = 4\,3a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-4} \cdot n \cdot \overline{m-6} \cdot 1 \cdot a = 1 \cdot 6a$

$n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $1 \cdot \frac{1}{2}a = 1 \cdot 6a$

$\overline{m-n} \cdot \overline{m-n-1} \cdot n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-4} \cdot \overline{m-5}$ [illegible] $1 \cdot \frac{1}{2}a = 1 \cdot 1a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-3} \cdot n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}a = 2 \cdot 1a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-5}$ [illegible] $n \cdot \overline{n-1} \cdot a$ = 29 6a

Vincere del Mercante

$\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}$ [illegible] $1 \cdot a = 12\,6a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-2} \cdot n \cdot \overline{m-4} \cdot \overline{m-5}$ [illegible] $1 \cdot a = 6\,1a$

$\overline{m-n}$ [illegible] $\overline{m-n-4} \cdot n \cdot \overline{m-6} \cdot 1 \cdot a = 4\,6a$

24 6a

Probabilità

del Banchiere : del Mettitore

29 : 24

Numero intero delle combinazioni

$m \cdot \overline{m-1} \cdot 2 \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 = 56$.

Lucro del Banchiere

$\frac{5a}{56}$

5 Una serie di ragionamenti simile a quella di cui sopra, pianta le carte significanti con quattro, conduce a determinare le formole adattate al caso, che le carte significanti siano tre.

Carte indifferenti 3, significanti 3

Vincita del Banchiere

$\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot 1 \cdot a \ldots = 6a$

$n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{m-2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}a \ldots = 6a$

$12a$

Vincita di chi mette

$\overline{m-n} \cdot n \cdot \overline{m-2} \cdot 1 \cdot a \ldots = 6a$

Probabilità

Del Banchiere : del Mettitore

2 : 18

Numero intero delle combinazioni

$m \cdot \overline{m-1} \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Lucro del Banchiere

$\frac{6a}{24}$ $\frac{a}{4}$

Carte indifferenti 3 , significanti 3

Vincita del Banchiere

chiamo b conforme al solito a quantità $\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}$ & 1

$\overline{m-n}\cdot n\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot a$ ——— $= 36\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-2}\cdot n\cdot\overline{m-4}\cdot 1\cdot a$ — $= 6\,ba$

$n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot\frac{1}{2}a$ ——— $= 12\,ba$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}a$ ——— $= 6\,ba$

$= 60\,ba$

Vincita del Mettitore

$\overline{m-n}\cdot n\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot a$ ——— $= 36\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-2}\cdot n\cdot\overline{m-4}\cdot 1\cdot a$ ——— $= 6\,ba$

$42\,ba$

Probabilità

Del Banchiere — Del Mettitore

$10 : 7$

Numero intero delle combinazioni

$m\cdot\overline{m-1}$ & 1 — 5 & 1 = 120

Lucro del Banchiere

$$\frac{18a}{120} = \frac{3a}{20}$$

Carte indifferenti 5 , significanti 3

Vincita del Banchiere

$= 90\,ba$

$\overline{m-n}\cdot n\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot a$ ——— $= 35\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-2}\cdot n\cdot\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}$ & $1\cdot a$ — $= 5\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-4}\cdot n\cdot\overline{m-6}\cdot 1\cdot a$ ——— $= 15\,ba$

$n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot\frac{1}{2}a$ ——— $= 12\,ba$

$\overline{m-n}\cdot\overline{m-n-1}\cdot n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}$ & $1\cdot\frac{1}{2}a$ — $= 3\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-3}\cdot n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{m-6}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}a$ — $=$

$160\,ba$

Vincita del Mettitore

$= 90\,ba$

$\overline{m-n}\cdot n\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}$ & $1\cdot a$ ——— $= 35\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-2}\cdot n\cdot\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}$ & $1\cdot a$ — $= 5\,ba$

$\overline{m-n}$ & $\overline{m-n-4}\cdot n\cdot\overline{m-6}\cdot 1\cdot a$ ——— $=$

$130\,ba$

Probabilità

Del Banchiere	Del Mettitore

$14 : 11$

3 Numero intero delle combinazioni

$m \cdot \overline{m-1} \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3366$

Lucro del Banchiere

$\frac{388a}{3366} = \frac{3a}{28}$

---

2. Le sovrapposte formole, che servono alle tre carte significanti, si adattano alla ipotesi dell'unica carta significante, cancellando dalla vincita del Banchiere l'utile derivante dalle gemelle, o sia i termini moltiplicanti per $2a$, e levando eziandio dalla vincita del Mettitore l'ultimo termine, indicante le combinazioni, quando la carta significante si trova nell'ultimo luogo, nel qual in caso nulla perde chi mette.

3 Fatta conforme il solito la quantità $\overline{m-n} \cdot \overline{m-n-1} \cdot \&c \cdot 1 = 6$ le nostre formole possono prendere il seguente aspetto semplice, e ridursi a calcolo con somma facilità.

Carte significanti nº 3

Vincita del Banchiere

$\frac{m}{2} \cdot 6a$

Vincita di chi mette.

$\overline{\frac{m}{2} - 1} \cdot 6a$

Probabilità

Del Banchiere	Del Mettitore

$\frac{m}{2} : \frac{m}{2} - 1$

Differenza delle vincite

$\frac{6a}{m6}$ numero intero delle combinazioni

$\frac{a}{m}$

Caso significanti num. 2

Incasso del Banchiere

$\overline{m-2} \cdot 2ba$

$+\ \overline{m-4} \cdot 2ba$

&c

$+\ 2 \cdot 2ba$

$+\ \frac{\overline{m+2}}{2} \cdot ba$

Incasso di chi mette

$\overline{m-2} \cdot 2ba$

$+\ \overline{m-4} \cdot 2ba$

&c

$+\ 2 \cdot 2ba$

Le probabilità hanno come le vincite

Giri [?] delle vincite

$\frac{\overline{m+2}}{2} \cdot ba$

Numero intero delle combinazioni

$m \cdot \overline{m-1} \cdot b$

Lucro del Banchiere

$\frac{\overline{m+2} \cdot a}{2m \cdot \overline{m-1}}$

Caso significanti neg. 3

Vincita del Banchiere

$\overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot 3\,6\,a$

$+\ \overline{m-4} \cdot \overline{m-5} \cdot 3\,6\,a$

$\mathcal{G}$

$+\ 2 \cdot 2 \quad \cdot 3\,6\,a$

$+\ \quad m-2 \cdot 3\,6\,a$

$+\ \quad m-4 \cdot 3\,6\,a$

$\mathcal{G}$

$+\ \quad 2 \cdot 3\,6\,a$

Vincita del Mettitore

$\overline{m-2} \cdot m-3 \cdot 3\,6\,a$

$+\ \overline{m-4} \cdot \overline{m-5} \cdot 3\,6\,a$

$+\ \mathcal{G}_2 \cdot 1 \cdot 3\,6\,a$

Le Probabilità stanno come le vincite

Differenza delle vincite.

$\overline{m-2} + \overline{m-4\ \mathcal{G} + 2} \cdot 3\,6\,a$

Numero intero delle combinazioni.

$m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot 6$

Lucro del Banchiere

$$\frac{\overline{m-2+m-4\ \mathcal{G}+2} \cdot 3a}{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}$$

Carte significanti m.° 4

Vincita del Banchiere

$\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}\cdot 4ba$

$+\ \overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\cdot\overline{m-6}\cdot 4ba$

$+\ \underline{\mathcal{L}}\ 4\cdot 3\cdot 2\cdot 4ba$

$+\ \overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot 3\cdot 2ba$

$+\ \overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\cdot 3\cdot 2ba$

$+\ \underline{\mathcal{L}}\ 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2ba$

Vincita di chi mette

$\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot\overline{m-4}\cdot 4ba$

$+\ \overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\cdot m-6\cdot 4ba$

$+\ \underline{\mathcal{L}}\ 4\cdot 3\cdot 2\cdot 4ba$

Le probabilità stanno come le vincite

Differenza delle vincite

$\overline{\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}+\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \mathcal{L}+2}\cdot 6ba$

Numero intero delle combinazioni

$m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}\cdot 6$

Lucro del Banchiere

$$\frac{\overline{\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}+\overline{m-4}\cdot\overline{m-5}\ \mathcal{L}+2}\cdot 6a}{m\cdot\overline{m-1}\cdot\overline{m-2}\cdot\overline{m-3}}$$

3R

Problema

Dato il frutto che ricava per esempio il monte di pietà a un tanto per cento dei suoi capitali, e data la vita media dei soggetti che compongono una data comunità, trovare quanto per cento di vitalizio possa contribuire il monte senza discapito.

Problema

[D]ato il frutto che ricava per esempio [un] Monte [...] a un tanto per cento de' suoi capitali, e data la [...] [m]edia dei soggetti che compongono [...] della Comunità, trovare quanto per cento di vitalizio possa [...] buire il Monte senza discapito

Sia (a) il capitale, che si vuole investire sulle vite; come [...] a ragione di [...] al frutto, che ricava [...], di modo che posto (a) il capitale fruttante sia (ha) il frutto. Chiamisi (x) quel tanto di [...] vitalizio che relativamente al capitale (a) può contribuire il Monte.

Il capitale del 1mo anno sarà a. Il capitale del secondo anno sarà (a) più il frutto (ha) che à ricavato il Monte nel 1mo anno meno il vitalizio (x) che à sborsato il Monte, cioè a dire $a+ha-x$. Il capitale del terzo anno si troverà eguale al capitale del 2do anno $a+ha-x$ più il frutto $ha+h^2a-hx$ ricavato dal Monte da detto capitale il 2do anno, meno il vitalizio (x) cioè a dire $a+2ha+h^2a-2x-hx = a+\overline{2+h}\times\overline{ha-x}$. Seguitando con tal metodo ci si presenterà la serie

Anni	1mo	2do	3o	4to
Capitali	a	$a+ha-x$	$a+\overline{2+h}\times\overline{ha-x}$	$a+\overline{3+3h+h^2}\times\overline{ha-x}$

Anni	5to	6to
Capitali	$a+\overline{4+6h+4h^2+h^3}\times\overline{ha-x}$	$a+\overline{5+10h+10h^2+5h^3+h^4}\times\overline{ha-x}$

È facile da scoprire che tutta la diversità dei sopraddetti capitali consiste nei coefficienti, che moltiplicano la quantità $ha-x$. Ora indaghiamo la legge dei mentovati coefficienti, i quali si possono scrivere nel seguente modo

Anni	1mo	2do	3o	4to	5to
Coefficienti	0	1	$2+\frac{2\cdot h}{2}$	$3+\frac{3\cdot 2h}{2}+\frac{3\cdot 2h\cdot h}{2\cdot 3}$	$4+\frac{4\cdot 3h}{2}+\frac{4\cdot 3h\cdot 2h}{2\cdot 3}+\frac{4\cdot 3h\cdot 2h\cdot h}{2\cdot 3\cdot 4}$

Dalla sola considerazione della sovrapposta serie si ricava

la legge

la legge ricercata. Per esempio il coefficiente nel anno sarà

$$a + \frac{g\cdot 8h}{2} + \frac{g\cdot 8h\cdot 7h}{2\cdot 3} + \frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h\cdot 5h}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} +$$

$$\frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h\cdot 5h\cdot 4h}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h\cdot 5h\cdot 4h\cdot 3h}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} +$$

$$\frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h\cdot 5h\cdot 4h\cdot 3h\cdot 2h}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{g\cdot 8h\cdot 7h\cdot 6h\cdot 5h\cdot 4h\cdot 3h\cdot 2h\cdot h}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}$$

Non mi tratterrò molto sulla dichiarazione della legge de' nostri coefficienti, avvenendo che una accurata [illegible] parole. Dirò solo che il primo termine, come altresì il numero dei termini, sono [illegible] all'anno [illegible] esponente dell'anno meno l'unità, cioè a dire nell'esempio sovrascritto dell'anno decimo $= 9$ $10-1$. [illegible] chiamato (m) il coefficiente moltiplicante in generale $\overline{na-x}$, avremo una espressione generale e indeterminata del capitale per qualunque anno, vale a dire

$a + m.\overline{na-x}$, la quale si renderà particolare [illegible] (m) quel valore che à il coefficiente in un dato anno

Ora perchè il Monte né ci perda ne ci guadagni, fa di uopo che il capitale $a + m.\overline{na-x}$ al fine dell'ultimo anno, dopo pagato il vitalizio, o sia al principio dell'anno susseguente si uguagli a nulla. Avremo dunque l'equazione

$a + m.\overline{na-x} = 0$ dalla quale deduremo il vero valore di x, cioè

$\frac{a}{m} + na = x$ il che ec.

Sia per esempio di quattro anni la vita media di vecchj componenti un Ospitale, e perchè il Monte non si discapiti, bisognerà che sia nullo il capitale dell'anno quinto. Nell'anno 4to abbiamo il coefficiente

$= 4 + \frac{4\cdot 3h}{2} + \frac{4\cdot 3h\cdot 2h}{2\cdot 3} + \frac{4\cdot 3h\cdot 2h\cdot h}{2\cdot 3\cdot 4}$, il qual

valore sostituito nella formola generale $\frac{a}{m} + ha = x$ 39

si rappresenterà $\dfrac{a}{4 + \frac{4\cdot 3h}{2} + \frac{4\cdot 3h\cdot 2h}{2\cdot 3} + \frac{4\cdot 3h\cdot 2h\cdot h}{2\cdot 3\cdot 4}} + ha = x$

Ricavi il Monte il cinque per ~~cento~~ onde sia $h = \frac{1}{20}$ e fatti i dovuti computi si troverà

$$\frac{a}{4 + \frac{24.81}{8000}} + \frac{a}{20} = \frac{8000\cdot a}{34481} + \frac{a}{20} = x.$$

Posto $a = 100$ troveremo $x = 28 + \frac{6937}{34481}$

Se dunque il Monte contribuisse il 28 per cento ~~nella vita~~ dei mentovati vecchi, la cui vita arriverà anni quattro, avrebbe dell'avvantaggio.

Si potrebbe il problema trattare inversamente, e preso per dato il vitalizio (x), indagare il numero degli anni ne' quali il Monte lo può pagare senza discapito. Chiamisi n, il numero degli anni, (suppongo sempre n numero razionale ed intero) ed a norma delle cose di sopra dette avremo la formola

$$\frac{a}{x - ha} = m = n + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot h}{2} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot h^2}{2\cdot 3} + \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}\cdot h^3}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ \&c}$$

Facciasi $m = p + q + r + s + t + u + y + z$ &c colla condizione che sia $p = n$ (1ª), $q = \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot h}{2} = \overline{n^2 - n}\cdot\frac{h}{2}$ (2ª)

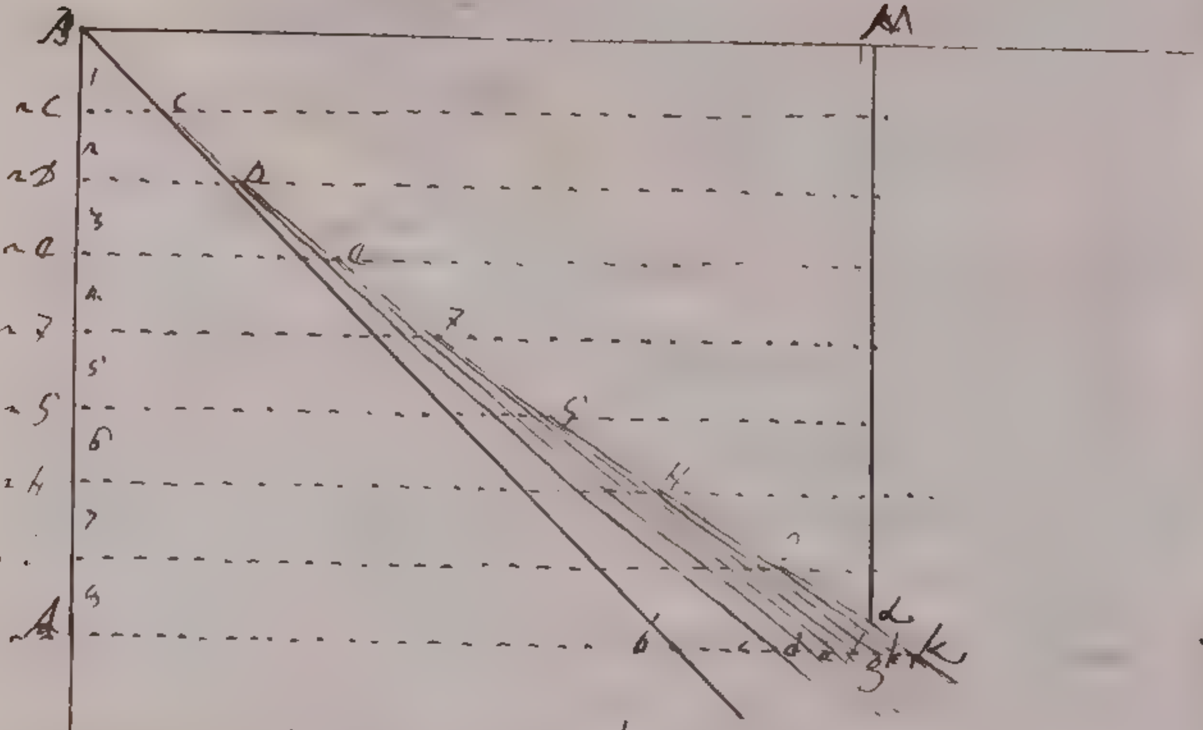
$r = \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot h^2}{2\cdot 3} = \overline{n^3 - 3n^2 + 2n}\cdot\frac{h^2}{6}$. 3ª.

$s = \frac{n\cdot\overline{n-1}\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{n-3}\cdot h^3}{2\cdot 3\cdot 4} = \overline{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}\cdot\frac{h^3}{24}$ 4ª.

e così di seguito.

Descrivo a squadra le due linee AB, BK, e da B verso A segno in la linea BA le unità in numero BaC, aCa2, a2Da, a2a7 &c, la somma delle quali indica il numero indeterminato di anni, per cui il Monte è da pagare il vitalizio dato x. Per i punti aC, aD, a8, a7 &c tiro le linee aCC, aDD, a8C, a77 &c parallele alla linea BK. Delineata la B6 in maniera, che faccia angolo

semiretto



unirretto colla linea BA, è cosa chiara, che il triangolo BAb sarà il luogo corrispondente alla 1ma equazione $p = n$, e che posta $BA = n$, sarà $Ab = p$.

Per ogni punto [illegible] descrivo la Parabola Appolloniana CDe adattata alla seconda equazione $q = \overline{n^2 - n} \cdot \frac{h}{2}$ colla legge, che messa $BA = n$, sia $bc = q$. Passerà la nostra curva per il punto C in cui la inclinata Bb taglia la linea 1CC, atteso che fatta nella 2da equazione $n = B1C = 1$ si trova $q = 0$.

Delineo poscia la curva del terzo grado Ded propria della terza equazione $r = \overline{n^3 - 3n^2 + 2n} \cdot \frac{h^2}{6}$ in maniera che messo al solito $BA = n$, sia $cd = r$, la quale cd è intercetta tra le due curve CDe del 2do grado, Ded del terzo. La curva Ded passerà per il punto D in cui la linea 2DD taglia la curva del 2do grado CDe. In fatti se nella 3a equazione si metterà $n = B2D = 2$, si troverà $r = 0$:

Con un metodo si costruisca la curva del 4to grado Eze corrispondente alla quarta equazione, colla avvertenza

che taglia $31-n$, via cie = s' intercetta fra i ... curve del termine del quarto grado. Questa curva avrà comune il punto C colla curva del terzo grado antecedentemente descritta.

Si continui con simil ordine la costruzione delineando le curve FGf del 5.to grado, GHg del 6.to grado, HIh del 7.mo IK dell' 8.vo &c. sempre colla legge, che essendo $BA = n$ venga delle intercette e... hK espressa l'incognita, che nelle respettive equazioni forma l'omogeneo di comparazione: La curva del 5.to grado passerà per il punto F comune alla curva del 4.to grado, ed alla linea iFf: la curva del 6.to grado passerà per il punto G comune alla curva del 5.to grado, ed alla linea zGG, e così di mano in mano.

Si osservi, che al fine del 1.mo anno io non ò che una sola intercetta zLL, al fine del 2.do ne ò due; fine il terzo anno ne ò tre, e così di seguito; di modo che le intercette corrispondono al num.^{ro} degli anni.

Descritta la serie delle sopra curve, che vanno crescendo di grado per l'unità, si segni $BM = \frac{a}{x-ha}$ quantità cognita, e condotta ML parallela a BA, si vede passa per uno de punti C, D, e, F, G, H, I, K &c., l'intercetta ML fra il punto M e la prima curva dalla linea ML incontrata si eguaglierà ad (n) numero degli anni cercato. Che se il punto L cade di mezzo fra due dei mentovati punti C, D, e, F, G &c., ciò indica che il monte avrà vantaggio a costituire il dote vitalizio (x) per un num.^{ro} di anni interi immediatamente minore di ML, e discapito a pagarlo per un num.^{ro} di anni interi immediatamente maggiore. Posta $a = 100$, $h = \frac{1}{20}$, si determinerà $x = 16$ e conseguentemente $BM = \frac{a}{x-ha} = \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}$; e condotta ML per il punto M, ricaderà il punto L fra i due punti ... corrispondenti al 7.mo anno compiuto, K corrispondente al fine delli 8.vo anni. Il Monte adunque, che ricava il cinque per cento dai capitali che gira, pagherà con utile

il (16)

4r

(18) per cento il vitalizio di un corpo di persone la cui vita media anni (7), e riceverà con danno pagandolo ad un altro corpo, la cui vita media anni (8).

Dovrà il Monte pagare con qualche lucro il dieci per cento, mentre la vita media sia di anni (14).

il otto per cento corrisponderà agli anni (20) di vita con qualche utile del Monte

il sei per cento agli anni (37) con poco danno

il cinque e mezzo per cento agli anni 49 con un po ...

il cinque e $\frac{2}{5}$ per cento agli anni 53 con un po di utile

il cinque e $\frac{3}{10}$ per cento agli anni ...

il 13 un po scarso per cento agli anni (10).

il 14 un po crescente per cento agli anni (9)

il $5\frac{4}{5}$ per cento un po scarso agli anni 41

Conchiudo con una non inutile avvertenza. Abbiamo veduto come le espressione generale per qualunque a. del capitale che io chiamo $c = a + m.\overline{ha-x}$ si supponga nullo il vitalizio x e ciò posto avrà la formola $c = a + mha$, la quale il valore del capitale per qualunque anno ci esprime mentre i frutti si mettano a capitale. Per sapere il valore di (c) dopo un dato numero di anni sarà di uopo sostituire nella formola in cambio (m) quel particolare valore che risulta un dato numero di anni gli è conveniente a norma della equazione

$$m = n + \frac{n.\overline{n-1}.h}{2} + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}\,h^2}{2.3} + \text{etc.}$$

Dopo (14) anni il capitale primo (a) sarà raddoppiato, trovandosi pross.te $c = 2a$, mentre sia il frutto $h = \ldots$

Al fine dell'anno 37 sarà pross.te $c = 6a +$

Al fine dell'anno 49 sarà pross.te $c = 11a$

Al fine dell'anno 50 sarà pross.te $c = 11\frac{1}{2}.a$

Al fine dell'anno 100 sarà pross.te $c = 132\,a.$

Progetto per le Monache
di S. Castelfranco

Le Monache di Castelfranco per non consumare i loro capitali anno bisogno di sette in ottocento Ducati di entrata e più all'anno. Si potrebbe ottenere un tal fine nel modo seguente

Si investano nel Monte di Pietà a vita delle 28 Monache viventi D.ti 12600 cioè a dire 450 ducati per caduna. La vita media delle Monache di Castelfranco tratta dai registri fin dalla istituzione del Monastero è di anni 58. Le Monache viventi compresa anche quella, che è per vestir l'abito religioso, anno di età media anni 48 1/2; laonde restano loro di vita media anni 9 1/2. Se la vita media fosse di anni 10 potrebbe il Monte, come si deduce dai calcoli, contribuire senza suo discapito il 13) un 10 scarso per cento. Ora essendo la vita media che resta alle presenti Monache di anni 9 1/2 però il Monte con suo vantaggio contribuire il (13) per cento cioè a dire D.ti 58 1/2 a ciascuna Monaca relativa:mente al capitale vitalizio di D.ti 450 sulla vita di ogni Monaca investito. Si lasci il mezzo Ducato per maggior utile del Monte, e s'incarichi il Luogo Pio il debito di pagare vitaliziamente a ciascuna Monaca Ducati 58. Fino adunque che vivono tutte le viventi Monache si ricaverà di entrata annua dal Monte D.ti 1624. Ma il Capitale di D.ti 12600 rendeva per avanti alle Monache in ragione di (5) per cento D.ti 630; dunque l'entrata è accresciu:ta poco meno di D.ti 1000 all'anno.

Morendo una Monaca si supplirà ai (58) ducati di rendita che mancano investendo nel Monte vitaliziamente D.ti 1000 di dote della Monaca che subentra in ragione di 5 4/5 per cento o di 58 per migliajo. Può il Monte contribuire un tal vitalizio con qualche suo utile mentre le Monache dopo professate vivono in corpo anni 40. , vita media che si deduce dai registri del Monastero

Si computa [illegible] il Monastero [illegible] 28 a 29 mila ducati di capitale. Tolto dunque quel che investiva vitalizio nel Monte dei [illegible] restavano alle Monache D.ti 15000 incirca di Capitale perpetuo. Morte le presenti Monache e restituite abitanti, il Monastero si troverà ad avere stabilmente nel Monte un Capitale vitalizio di D.ti 24000 che renderà alle Monache in ragione di $5\frac{4}{5}$ per cento D.ti 1624 annui.

Ma perchè potrebbe col corso del tempo andar a mancando qualche porzione del Capitale perpetuo di D.ti [illegible] però il Monastero suppliva colle investiture di quel poco che ricava dalle Monache converse allora che prendon l'abito; e colle investiture altresì di quei danari, che ritrovansi alle Monache dopo morte, onde almeno non cali la somma dei D.ti 15000

Problema

Sia il capitale (a), che rende il frutto annuo $\frac{a}{b}$, a sconto del quale si paghi ogni anno la contribuzione (c) maggiore del frutto $\frac{a}{b}$, si cerca per quanti anni si debba fare lo sborso.

Problema

Sia il capitale a', che rende ci ogni anno $\frac{a}{b}$, in sconto del quale si paghi ogni anno la contribuzione (c) maggiore del frutto $\frac{a}{b}$, si cerca in quanti anni si debba avere lo sborso.

Per iscoprire la strada di sciogliere il proposto Problema, poniamoci sotto gli occhi la serie dei capitali che si hanno di ciascun anno. Comparato il primo anno in somma del capitale si eguaglierà a le dato (a) più il frutto $\frac{a}{b}$ meno il contribuimento (c) onde avremo

Capitale alla fine dell'anno primo

$$a + \frac{a}{b} - c = a\cdot\frac{b+1}{b} - c$$

Alla fine dell'anno secondo troveremo il capitale medesimo eguale il capitale comparito l'anno primo $a\cdot\frac{b+1}{b} - c$ più il suo frutto $a\cdot\frac{b+1}{b^2} - \frac{c}{b}$, meno la contribuzione c cioè a dire

Capitale alla fine dell'anno 2do

$$a\cdot\frac{b+1}{b} + a\cdot\frac{b+1}{b^2} - c - \frac{c}{b} = a\cdot\frac{b^2+2b+1}{b^2} - c\cdot\frac{b+1}{b} - c =$$

$$a\cdot\frac{(b+1)^2}{b^2} - c\cdot\frac{b+1}{b} - c$$

Terminato l'anno terzo ci si presenterà il capitale medesimo eguale al capitale dell'anno 2do terminato $a\cdot\frac{(b+1)^2}{b^2} - c\cdot\frac{b+1}{b} - c$, più il suo frutto $a\cdot\frac{(b+1)^2}{b^3} - c\cdot\frac{b+1}{b^2} - \frac{c}{b}$ meno lo sborso c

Capitale alla fine dell'anno 3°

$$a\cdot\frac{b^2+2b+1}{b^2} + a\cdot\frac{b^2+2b+1}{b^3} - c\cdot\frac{b+1}{b} - c - c\cdot\frac{b+1}{b^2} - \frac{c}{b} - c$$

Si noti

mentre che riducendo le quantità $a\cdot\frac{\overline{b^2+2b+1}}{b^2}+a\cdot\frac{\overline{b^2+2b+1}}{b^3}$ allo stesso denominatore b^3, come ancora le quantità $-c-c\cdot\frac{\overline{b+1}}{b^2}-\frac{c}{b}$ allo stesso denominatore b^2 si trova fatte le debite riduzioni la seguente più semplice espressione del capitale alla fine dello anno [illegible].

Espressione più semplice del capitale compiuto l'anno 3.°

$$a\cdot\frac{b^3+3b^2+3b+1}{b^3}-c\cdot\frac{b^2+2b+1}{b^2}-c\cdot\frac{b+1}{b}-c=$$

$$a\cdot\frac{\overline{b+1}^3}{b^3}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^2}{b^2}-c\cdot\frac{b+1}{b}-c$$

Alla attenta considerazione dei capitali residui alla fine degli anni 1.mo 2.do e 3.o facilmente si ricava il capitale residuo alla fine di qualunque anno per esempio

Capitale alla fine dello anno 4.to

$$a\cdot\frac{\overline{b+1}^4}{b^4}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^3}{b^3}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^2}{b^2}-c\cdot\frac{b+1}{b}-c$$

Questo capitale si potrebbe anche esprimere nel modo che segue

$$a\cdot\frac{\overline{b+1}^4}{b^4}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{4-1}}{b^{4-1}}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{4-2}}{b^{4-2}}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{4-3}}{b^{4-3}}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{4-4}}{b^{4-4}}$$

Quindi se il numero degli anni compiuti o sia delle contribuzioni sia (x) terminato l'anno [illegible] fine (x) si avrà il capitale

$$a\cdot\frac{\overline{b+1}^x}{b^x}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{x-1}}{b^{x-1}}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{x-2}}{b^{x-2}}-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{x-3}}{b^{x-3}}\ \&c\ -c$$

...ia è geometrica in serie

$$-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x-1}}{b^{x-1}} - c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x-2}}{b^{x-2}} - c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x-3}}{b^{x-3}} \text{ ec. } - c$$

e di cui termini sulla ragione ... di $\frac{b+1}{b} : 1$. Da ciò avremo la somma moltiplicando e dividendo essa a ... per $\frac{b+1}{b} - 1$, si troverà una somma eguale a

$$\frac{-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x}}{b^{x}} + c}{\frac{b+1}{b} - 1} = -c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x} - b^{x}}{b^{x-1}} :$$

$$-c\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x} - b^{x}}{b^{x-1}} = -cb\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x} - b^{x}}{b^{x}}$$

Epperò restarà alla fine dell'anno indicato dalla specie (x) il seguente capitale

$$a\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x}}{b^{x}} - cb\cdot\frac{\overline{b+1}^{\,x} - b^{x}}{b^{x}} = \frac{\overline{a-cb}\cdot\overline{b+1}^{\,x} + cb\cdot b^{x}}{b^{x}}$$

Sia (x) il numero degli anni alla fine dei quali, col mezzo del suo (x) di contribuzioni c, si estinto il debito (a), in ... Ora tali ipotesi si agevolmente ... è nullo il capitale residuo alla fine ... posto il numero di anni (x) e perciò si avrà

$$\frac{\overline{a-cb}\cdot\overline{b+1}^{\,x} + cb\cdot b^{x}}{b^{x}} = 0 \quad \text{e sia}$$

$$\overline{cb-a}\cdot\overline{b+1}^{\,x} = cb\cdot b^{x}$$ e passando ai logaritmi

$$l\,\overline{cb-a} + x\,l\,\overline{b+1} = l\,cb + x\,l\,b \quad \text{e sia}$$

$$l\,cb - l\,\overline{cb-a} = x\cdot\overline{l\,\overline{b+1} - l\,b} \quad \text{e finalmente}$$

$$\frac{l\,cb - l\,\overline{cb-a}}{l\,\overline{b+1} - l\,b} = x$$

58

scendendo al caso particolare che si è stato rispetto ora $a = 497$, $b = 20$, $c = 74$. e ricorrendo alle tavole dei logaritmi ne risulterà il computo come qui sotto si vede.

$$lcb = l\,1480 = 3.1702617$$

$$lcb - a = l\,983 = 2.9925535$$

$$lcb - lcb-a = l1480 - l983 = 1777082$$

$$lb+1 = l\,21 = 1.3222193$$

$$lb = l\,20 = 1.3010300$$

$$lb+1 - lb = l21 - l20 = 211893$$

e perciò

$$x = \frac{lcb - lcb-a}{lb+1 - lb} = \frac{l1480 - l983}{l21 - l20} = \frac{1777082}{211893} = 8\,\frac{81938}{211893}$$

La nostra equazione dà $x = 8\,\frac{81938}{211893}$ dimostra che (8) anni occorreranno e con cettano ad estinguere il debito coi con venienti frutti. Per ciò sarà bene indagare il valore del capitale residuo (z) compiuto l'anno ottavo. In tale ipotesi per le cose di sopra dette si ha (??) la equazione. $\frac{\overline{a-cb}\cdot\overline{b+1}^8 + cb}{b^8} = z$

Chi volesse schivare il tedio di lunghissimi computi può ricorrere ai logaritmi, disposta avanti l'equazione nel modo sottoscritto $cb - z = \overline{cb-a}\cdot\frac{\overline{b+1}^8}{b^8}$ e fatto uso dei logaritmi

$$l\,\overline{cb-z} = l\,\overline{cb-a} + 8\,l\,\overline{b+1} - 8\,lb.$$

consultate le tavole, troviamo

$l\,\overline{cb-a} = l\,983 = 2.9925535$

$8\,l\,\overline{b+1} - l\,b = 8\,l\,21 - l\,20 = .1695144$

$l\,\overline{cb-a} + 8\,l\,\overline{b+1} - l\,b = l\,983 + 8\,l\,21 - l\,20 = 3.1620679$

Quest'ultimo logaritmo sta di mezzo fra i due seguenti $l\,1453 = 3.1622656$

$l\,1452 = 3.1619666$

la differenza dei quali = 2990

sottratto dal nostro logaritmo medio

3.1620679

il $l\,1452 = 3.1619666$

ne risulta la differenza 1013

e quindi si può prossimamente conchiudere esser il logaritmo medio trovato $3.1620679 = l\,\overline{cb-a} + 8\,l\,\overline{b+1} - l\,b = l\,1452\tfrac{1013}{2990}$

Avremo pertanto $l\,\overline{cb-z} = l\,1452\tfrac{1013}{2990}$ e quindi ritornando dai logaritmi alle quantità comuni, e sostituito in luogo di cb il suo valore 1480

$1480 - z = 1452\tfrac{1013}{2990}$ = prossimamente $1452\tfrac{1}{3}$;

equazione, da cui si deduce essere $z = 27\tfrac{2}{3}$, valor del capitale residuo alla fine dell'anno ottavo dopo fatto lo sborso $c = 74$.

Qualora adunque il contratto sia seguito, bisognerà [illegible] al Creditore otto annui consegnare [illegible] pagamenti $c = 74$, e di più alla fine dell'anno ottavo lo sborso del capitale residuo $z = 27\tfrac{2}{3}$. Così cogli otto annui pagamenti ed ultimo sborso si sarà interamente estinto il capitale dell'...

in seguito

in ragione di cinque per cento, il cui
valore al principio dello anno sarebbe
eguaglianza a 4.9

Riflessioni sopra la Regola di doppia falsa Posizione.

Riflessioni sopra la Regola di doppia falsa Posizione.

I. Per ritrovare il valore di una quantità incognita x, si assegni alla stessa arbitrariamente un valore x', di cui per i dati del Problema si cerchi un secondo valore relativo ad x', che chiamo z', e la differenza fra i detti valori sarà $-x'+z'$. Similmente supposto $= x''$ ~~il valore~~ un altro valore arbitrario dell'incognita, i dati del Problema determinino il secondo valore relativo $= z''$, onde si abbia la differenza $-x''+z''$. Per la Regola di doppia falsa Posizione avremo

$$\frac{(-x'+z')\cdot x'' - (-x''+z'')\cdot x'}{-x'+z'+x''-z''} = x$$

II. Il Sig. Francesco Venturelli nelle nuove Pratiche di Geometria pubblicate l'anno 1776 afferma di aver trovato fallace una tal regola, e propone per esempio il seguente quesito. Di due compagni nel traffico il secondo pose più del primo ducati 1400, e tutto il guadagno fu di ducati 1000; si vuol sapere il capitale del primo, dato che del guadagno abbia conseguito ducati 400.

La vera maniera di scioglierе il problema è quella che segue. Sia x il capitale del primo compagno. Con una falsa posizione assegno al detto capitale il valore x'. Poiché il secondo compagno ha il capitale $1400+x'$, il capital totale sarà $1400+2x'$. Ora se il lucro 1000 è prodotto dal capitale $1400+2x'$, il lucro 400 del primo compagno sarà prodotto dal capitale

$$(1400+2x')\cdot\frac{400}{1000} = (1400+2x')\cdot\frac{2}{5} = 560+\frac{4}{5}x' = z'$$

che è una nuova espressione relativa ad x' del ~~primo~~ capitale del primo compagno.

Avremo dunque $-x'+z' = -x' + (1400+2x')\frac{2}{5} = 560 - \frac{x'}{5}$

Non altrimenti con una seconda falsa posizione si stabilisca $= x''$ il capitale del primo compagno, e si troverà una nuova espressione relativa ad x'' di quello capitale $= 560 + \frac{4}{5}x'' = z''$ e $z'' - x'' = 560 - \frac{x''}{5}$.

Quindi per l'esposta regola scopriremo

$$\frac{\left(560 - \frac{x'}{5}\right)\cdot x'' - \left(560 - \frac{x''}{5}\right)\cdot x'}{560 - \frac{x'}{5} - 560 + \frac{x''}{5}} = x$$

Che questa regola sia giusta si dimostra agevolmente così. Effettuate le indicate moltipliche, ci si presenta

$$\frac{560\cdot(x''-x') - \frac{x'x''}{5} + \frac{x''x'}{5}}{\frac{1}{5}\cdot(x''-x')} = x,$$

ed espurgata la formola $2.800 = x$ valore del capitale altronde noto del primo compagno.

Si osservi che le false posizioni svaniscono; e che il vero valore del capitale del primo compagno unicamente si de- sponendo nella formola i -duce falsi valori del detto capitale.

III. Si può ancora trovare il giusto valore del mentovato capitale, deducendo dalle false posizioni del capital totale, il vero valore dell'intero capitale espresso per il capitale del primo compagno, e per le costanti; e da queste inferendo il valore di x.

Sia x' una falsa grandezza del capitale del primo compagno, e se il suo frutto $= 400$, all'intero frutto $= 1000$ corrisponderà il capital totale $= \frac{5x'}{2}$: ma un tal capitale $= 1400 + 2x'$; dunque il divario fra le due espressioni $= \frac{5x'}{2} - 1400 - 2x' = \frac{1}{2}x' - 1400$.

Similmente ad una nuova falsa posizione del capitale $= x''$ del primo compagno corrisponderanno due espressioni $\frac{5x''}{2}$, $1400+2x''$ dell'intero capitale, e la loro differenza $\frac{1}{2}x''-1400$. Avremo pertanto secondo la Regola di doppia falsa posizione

$$\frac{(\frac{1}{2}x'-1400)\cdot\frac{5x''}{2}-(\frac{1}{2}x''-1400)\cdot\frac{5x'}{2}}{\frac{1}{2}x' - 1400 - \frac{1}{2}x''+1400} = \frac{5x}{2},$$

ed effettuando le indicate moltiplicazioni,

$$\frac{\frac{5}{4}x'x'' + 1400\cdot(\frac{5}{2}x'-\frac{5}{2}x'') - \frac{5}{4}x'x''}{\frac{1}{2}x'-1400 - \frac{1}{2}x''+1400} = \frac{5}{2}x$$

e cancellati i termini, che si elidono, e riflettendo essere $\frac{\frac{5}{2}x'-\frac{5}{2}x''}{\frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}x''} = 5$, $1400\cdot5 = \frac{5}{2}x$,

e finalmente $2800 = x$, come sopra.

Rifletto che anche qui si dileguano le false posizioni, e che il vero valore del capitale del primo compagno si determina col mezzo dei non veri valori dell'intero capitale. Avverto che in vece di $\frac{5}{2}x''$, $\frac{5}{2}x'$, $\frac{5}{2}x$ esprimenti il capital totale, avrei potuto usare le quantità proporzionali x'', x', x, esprimenti i capitali due finti, ed uno vero del primo compagno.

IV. Ora passo ad esaminare due altre soluzioni, che conducono al falso. Ritenute le stesse denominazioni, facciasi come l'intero capitale $= 1400+2x'$ al capitale del primo compagno $= x'$, così l'intero guadagno $= 1000$ al guadagno del primo compagno $= \frac{1000x'}{1400+2x'}$; ma ha guadagnato 400; dunque ne risulta la differenza $400 - \frac{1000x'}{1400+2x'}$.

Inoltre chiamato x'' il capitale del primo compagno, sarà il suo guadagno $\frac{1000x''}{1400+2x''}$ e la differenza fra il vero guadagno, e il finto

=

$= 400 - \frac{1000x''}{1400+2x''}$. Operando al parere del Sig. Vanrelli secondo la regola, si dovrebbe avere

$$\frac{\left(400 - \frac{1000x'}{1400+2x'}\right) \cdot x'' - \left(400 - \frac{1000x''}{1400+2x''}\right) \cdot x'}{400 - \frac{1000x'}{1400+2x'} - 400 + \frac{1000x''}{1400+2x''}} = x.$$

Indizio della falsità di questa formola si è, che non dileguansi le false posizioni x', x'', il che succede, perchè si mescolano i frutti coi capitali. Se si comporrà la formola coi soli frutti fittizj e vero del primo compagno, il tutto andrà a dovere, e si avrà rettamente

$$\frac{\left(400 - \frac{1000x'}{1400+2x'}\right) \cdot \frac{1000x''}{1400+2x''} - \left(400 - \frac{1000x''}{1400+2x''}\right) \frac{1000x'}{1400+2x'}}{400 - \frac{1000x'}{1400+2x'} - 400 + \frac{1000x''}{1400+2x''}} = \frac{1000x}{1400+2x}.$$

Facendo le indicate operazioni troveremo

$$\frac{400 \cdot \left(\frac{1000x''}{1400+2x''} - \frac{1000x'}{1400+2x'}\right)}{\frac{1000x''}{1400+2x''} - \frac{1000x'}{1400+2x'}} = \frac{1000x}{1400+2x},$$

e per conseguenza $400 = \frac{1000x}{1400+2x}$ e fatti i calcoli convenienti ~~operazioni~~:

$2800 = x$.

V. Inoltrandomi alla seconda fallace soluzione, faccio come il capital x' del primo compagno al guadagno 400, così i due capitali uniti $1400 + 2x'$ al competente lucro $= 400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)$. E poichè il guadagno totale $= 1000$, ne proviene la differenza $1000 - 400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)$. L'altra falsa posizione $= x''$ mi dà il nuovo lucro $= 400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)$, e la differenza fra il vero lucro, e il supposto $= 1000 - 400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)$. La regola, come pensa il Sig. Vanrelli dovrebbe

$$\frac{\left(1000 - 400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)\right) \cdot x'' - \left(1000 - 400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)\right) x'}{1000 - 400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right) - 1000 + 400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)} = x.$$

Neppure qui svaniscono le false posizioni x', x''; perchè si frammischiano i lucri, ed i capitali.

La formola secondo la vera regola è la seguente, siccome composta di soli guadagni totali

$$\frac{\left(1000-400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)\right)\cdot\left(400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)\right)-\left(1000-400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)\right)\cdot\left(400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)\right)}{1000-400\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)-1000+400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)}$$

$= 400\cdot\left(\frac{1400+2x}{x}\right)$. Espurgata la formola, si riduce così

$$\frac{1000\cdot\left(400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)-400\cdot\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)\right)}{400\left(\frac{1400+2x''}{x''}\right)-400\cdot\left(\frac{1400+2x'}{x'}\right)} = 1000$$

$= 400\cdot\left(\frac{1400+2x}{x}\right)$, e quindi $1000x = 560000 + 800x$, e finalmente $x = 2800$.

VI. Per far vedere la fallacia della regola di falsa posizione, il Sig. Ventretti propone il facilissimo quesito trovare il divisore di 24, che dia il 6 per quoziente.

Sia questo divisore x', e sarà il quoziente $= \frac{24}{x'}$: ma questo quoziente $= 6$; dunque la differenza $= 6 - \frac{24}{x'}$. Assunto un altro divisore x'', avremo il quoziente $\frac{24}{x''}$, e la differenza $= 6 - \frac{24}{x''}$, e quindi per la vera regola

$$\frac{\left(6-\frac{24}{x'}\right)\cdot\frac{24}{x''}-\left(6-\frac{24}{x''}\right)\cdot\frac{24}{x'}}{6-\frac{24}{x'}-6+\frac{24}{x''}} = \frac{24}{x}, \text{ ossia}$$

$$\frac{6\left(\frac{24}{x''}-\frac{24}{x'}\right)}{\frac{24}{x''}-\frac{24}{x'}} = 6 = \frac{24}{x}, \text{ e finalmente}$$

$x = 4$, il che dimostra l'inganno del Sig. Ventretti.

VII. Un Signore ha venduto due cavalli, uno 10 zecchini più dell'altro; e la somma di ambedue i prezzi divisa per $\frac{3}{4}$ del prezzo minore dà 2 di quoziente: quali sono stati i prezzi. Sia x il prezzo maggiore, $x-10$ il prezzo minore

minore, $2x-10$ la loro somma, e questa somma divisa per $\frac{5}{4}$ dal prezzo minore $\cdot 2$ si agguaglierà a.

$$\frac{2x-10}{\frac{5}{4}\cdot(x-10)} = \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x-10)}{x-10}\cdot$$

La prima falsa posizione stabilisca il prezzo maggiore $= x'$, il minore $= x'-10$, la loro somma $= 2x'-10$, e la stessa divisa per $\frac{5}{4}$ dal prezzo minore $\cdot 2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x'-10)}{x'-10}$: ma questa esser dee $= 2$; dunque la differenza di tali quantità $= 2 - \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x'-10)}{x'-10}$

La seconda falsa posizione determini il prezzo maggiore $= x''$, il minore $= x''-10$, il loro aggregato diviso per $\frac{5}{4}$ del prezzo minore $= \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x''-10)}{x''-10}$, che dovendo essere $= 2$, mi somministra la differenza $2 - \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x''-10)}{x''-10}\cdot$

Ciò premesso ne nasce la vera formola interamente composta di quantità analoghe

$$\frac{\left(2-\frac{4}{5}\frac{(2x'-10)}{x'-10}\right)\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{(2x''-10)}{x''-10} - \left(2-\frac{4}{5}\frac{(2x''-10)}{x''-10}\right)\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{(2x'-10)}{x'-10}}{2-\frac{4}{5}\cdot\frac{(2x'-10)}{x'-10} - 2 + \frac{4}{5}\frac{(2x''-10)}{x''-10}}$$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{(2x-10)}{x-10}$, che ridotta mi dà

$2 = \frac{4}{5}\frac{(2x-10)}{x-10}$, e quindi $x = 30$

VIII. Vi sono due fontane, una dispensa 12 brente d'acqua al giorno più dell'altra, e la somma delle brente dispensate da tutte due insieme accresciuta di 20, e poi divisa pel numero delle brente dispensate dalla fontana più scarsa meno 4 ha da dare il quoziente 4: quante ne dispensano l'una, e l'altra? Sia x il numero delle brente versate dalla fontana più abbondante, e dalla fontana più scarsa scaturiranno brente $= x-12$; la loro somma accresciuta di 20 sarà $2x-12+20 = 2x+8$, la quale divisa pel numero delle brente dispensate dalla fontana più scarsa meno 4, cioè per $x-16$

$x-16$ mi dà la frazione $\frac{2x+8}{x-16}$.

Sia x' la prima falsa posizione, e col premesso discorso scoprirò la grandezza $\frac{2x'+8}{x'-16}$: ma questa esser dee $= 4$; dunque ho la differenza $4-\frac{2x'-8}{x'-16}$

Non altrimenti relativamente alla seconda falsa posizione x'' scoprirò le due quantità analoghe $\frac{2x''+8}{x''-16}$, $4-\frac{2x''-8}{x''-16}$.

Il perchè avremo la formola

$$\frac{\left(4-\frac{2x'-8}{x'-16}\right)\cdot\frac{2x''+8}{x''-16}-\left(4-\frac{2x''-8}{x''-16}\right)\cdot\frac{2x'+8}{x'-16}}{4-\frac{2x'-8}{x'-16}-4+\frac{2x''+8}{x''-16}}$$

$=\frac{2x+8}{x-16}$, che si riduce alla seguente

$4=\frac{2x+8}{x-16}$, da cui raccolgo $x = 36$

IX. Si conchiuda, che la giusta regola di falsa posizione richiede che si usino espressioni i valori finti, e propri della stessa cosa quantità ~~analoga~~; il che facendosi conduce alle vere conseguenze. Noto per altro, che dileguandosi le false posizioni si perviene a formole, che vogliono essere trattate colle note regole dell'analisi, alle quali senza l'inutil giro delle false posizioni l'analisi stessa ci avrebbe condotto. Nell'ultimo esempio le condizioni del Problema richiedono $\frac{2x+8}{x-16}=4$, e quindi $x = 36$. Nel primo esempio abbiamo le due espressioni del capitale del primo compagno $x = 560+\frac{4}{5}x$ e per conseguenza $\frac{1}{5}x = 560$, ed $x = 2800$. Lo stesso dicasi degli altri esempj.

Metodo I.

Di determinare i quadrati tutti, che sono eguali a due quadrati.

Metodo II

Di determinare in numeri interi i quadrati, che sono eguali a due quadrati.

77

Determinare i quadrati
tutti, che sono eguali
a due quadrati

Sia x^2 uno di questi quadrati, e z^2 ~~uno~~ y^2 i due quadrati componenti. Pongo $x-u=z$, onde abbiamo $x^2-2xu+u^2=z^2$. Detraendo questo quadrato da x^2, il residuo sia uguagliato a y^2. Ci si presenterà pertanto $2xu-u^2=y^2$, e quindi $\frac{y^2+u^2}{2u}=x$ ~~sarà~~ sarà l'espressione generale dei numeri, che si cercano, e le radici dei due quadrati componenti il quadrato x saranno y, $z=x-u=\frac{y^2+u^2}{2u}-u=\frac{y^2-u^2}{2u}$.

Se y è, in conseguenza anche y^2 sia numero impari, non è necessario che tale u, ed u^2, ... sendo y^2+u^2 numero pari, possa dividersi per ... Bisogna altresì che y^2 sia numero. Si risponde, y^2+u^2, ... la divisione per u, ... y^2-u^2 ... la divisione ..., e nei valori di x, di z non abbiano ... rotti.

Ciò premesso, sia y numero impari, ed $u=1$, e conciossiachè qualunque numero impari è divisibile per 1, scopriremo le seguenti serie di tutti i possibili valori di x, y, z nella suddetta ipotesi. Tavola I.

Valori di x posto y impari ed $u=1$

1	5.	13.	25	41	61	85	113	145	&c.

Loro differenze

4.	8	12	16.	20.	24.	28.	32	&c.

Valori di y supponendolo impari ed $u=1$

1	3	5	7	9	11	13	15	17	&c.

Loro differenze

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	&c.

Valori di z posto y impari, ed $u=1$

0	4.	12.	24.	40.	60.	84	112	144	&c.

Loro differenze

4.	8	12.	16.	20	24	28	32	&c.

Sotto le serie dei valori di x, y, z ci ho notato le differenze fra due prossimi valori, le quali ci insegnano

insegnare a continuare quanto si vuole la serie suddetta.

— Ritenendo la supposizione di y^2 impari sia $u = 3$. Si Ho detto che y^2 essere dee un numero [illegible] in u. Nel nostro caso adunque y^2 dovrà essere divisibile per 3; condizione che non si può ottenere (dovendo essere y numero intero razionale, ed intero) quando anche y non ammetta la medesima divisione. I soli valori adunque, che possono assegnarsi ad y, in questa ipotesi sono 3. 9. 15. 21. 27

Tavola III.

Valori di x supponendo y impari, ed $u = 3$

3	15	39	75	123	183	255	339	435 &c

Loro differenze

12	24	36	48	60	72	84	96 &c

Valori di y supponendolo impari, ed $u = 3$

3	9	15	21	27	33	39	45 &c

Loro differenze

6	6	6	6	6	6	6

Valori di z supposto y impari, ed $u = 3$

12	36	72	120	180	252	336	432 &c

Loro differenze

12	24	36	48	60	72	84	96

Si avverta che i numeri di questa seconda tavola sono tripli dei loro corrispondenti nella tavola prima. In fatti se il quadrato del numero 5 si eguaglia ai quadrati dei numeri 3, 4, egli è chiaro che il quadrato del numero 3.5 = 15 pareggerà i quadrati dei numeri 3.3 = 9, 3.4 = 12. Perciò quando u si eguagli ad un numero impari non quadrato, come a dire 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17 &c, si troveranno tutti i corrispondenti valori di x, y, z moltiplicando per il detto numero i termini delle serie nella prima tavola contenute.

Che se u sia un numero impari quadrato per esempio 9, 25, 49, 121 &c, moltiplicando

per un tal numero la serie della prima tavola non si avranno tutti i possibili valori di x, y, z. Si osservi che dovendo essere y^2 divisibile per u, non è necessario in questa circostanza, che ancora y sia divisibile per u, bastando, che riceva la divisione per $\sqrt{u}$, di modo che ad y converranno i valori $1.\sqrt{u}$, $3.\sqrt{u}$, $5\sqrt{u}$ &c., e ad $x = \frac{y^2+u^2}{2u}$ i valori $\frac{1+u}{2}$, $\frac{9+u}{2}$, $\frac{25+u}{2}$ &c. Se si moltiplicassero per u i termini delle serie nella prima tavola, si ometterebbero innumerabili valori valabili di x, y, z, come col seguente esempio metterò in chiaro.

Sia $u = 9$, e secondo le cose dette, potranno ad y competere i valori 3, 9, 15, 21, &c. che sono i medesimi con quelli della seconda tavola. Si formerà adunque la seguente tavola.

Tavola III

Valori di x supponendo y impari, ed $u = 9$

5	9	17	29	45	65	89	117	149	&c.

Loro differenze

4	8	12	16	20	24	28	32

Valori di y supponendolo impari, ed $u = 9$

3	9	15	21	27	33	39	45	51	&c.

Loro differenze

6	6	6	6	6	6	6	6

Valori di z supponendo y impari, ed $u = 9$

4	0	4	20	36	56	80	104	140	&c.

Loro differenze

4	8	12	16	20	24	28	32

Moltiplicando per 9 la progressioni della prima tavola, ne risulterebbero i soli valori di x = 9, 45, 117 &c., e si tralascierebbero gli altri 5, 17, 29, 65, 89, 149 &c. Si applichi simil osservazione ai valori di y, e di z.

Passo alla considerazione, che y è per conseguenza y^2 siano numeri pari, la quale richiede che u, ed in altri casi per ritrovare le formole nei valori di $x = \frac{y^2+u^2}{2u}$, di $z = \frac{y^2-u^2}{2u}$. A questo

fine

ma egli è parimente necessario, che y^2 si divida per u. Posto u eguale ad un numero pari non quadrato che bisogna che y possa ripartirsi per u, e quindi ad esso el lecito di assegnare le sole grandezze u, $2u$, $3u$, $4u$, $5u$, $6u$ &c. Ma quando u [illegible] un numero pari quadrato, è sufficiente che y sia divisibile per $\sqrt{u}$, onde se gli adattino i valori $2\sqrt{u}$, $4\sqrt{u}$, $6\sqrt{u}$, $8\sqrt{u}$ &c.

La sottoposta tavola contiene le diverse grandezze di x, y, z nella ipotesi che [illegible] numero pari, $u = 2$.

Tavola IX.

Valori di x supponendo y pari, ed $u = 2$

2	[illegible]	10	17	26	37	50	65	[illegible]

Loro differenze

3	[illegible]	7	9	11	13	15	17

Valori di y supponendolo pari, ed $u = 2$

2	4	6	8	10	12	14	[illegible]	[illegible]

Loro differenze

[illegible]	2	2	2	2	2	2	2

Valori di z quando y è pari, e [illegible]

[illegible]	3	8	15	24	35	48	63	80

Loro differenze

3	[illegible]	7	9	11	13	15	17

Le differenze messe sotto le tre serie ci mostrano a dito il metodo di allungare a piacimento le serie stesse. Dando ad u altre grandezze, anche i numeri [illegible] pari ma non quadrati, [illegible] tutti i numeri, i [illegible] quadrati vengano [illegible] quadrati composti, si moltiplichino le tre serie della tavola IV. per $\frac{u}{2}$.

Resta da dir [illegible] cosa dalla supposizione, che y sia numero pari, ed u numero pari e quadrato. [illegible] la tavola V. le corrispondenti grandezze di x, y, z quando y è pari, ed $u = 4$, ed aggiunga poscia la maniera facile di trovare i valori di x, y, z

cangiati

77

aumentata la unquità ma di u

Tavola V.

Valori di x supponendo y pari, ed u = 4

4	10	20	34	52	74	100	130	164

Loro differenze

6	10	14	18	22	26	30	34

Valori di y supponendo y pari, ed u = 4.

4	8	12	16	20	24	28	32	3[illegible]

Loro diff.

4	4	4	4	4	4	4	4

Valori di z supponendo y pari, ed u = 4

0	6	16	30	48	70	96	126	160

Loro differenze

6	10	14	18	22	26	30	34

Si osservi che i numeri dalla tavola V sono doppi di quelli della tavola IV

Si avranno i valori di x, allora che u si eguagli a qualsivoglia numero pari quadrato, aggiungendo si troverà della serie [illegible] tavola V. la quantità u-4. Da questa serie si sottragga il valore di u, e [illegible] renderanno i relativi valori di z. Finalmente moltiplicando per ½√u la grandezza di y nella tavola V, conosceranno i valori di y, che sono [illegible] facenti alla grandezza di u, che da noi [illegible] stata prescelta.

Determinare i quadrati tutti che sono eguali a due coppie quadrati

In un problema [illegible] di [illegible] mento; imperocchè prendendo dalle tavole due terne di numeri, per esempio da prima 5, 3, 4; 13, 5, 12, moltiplicando i primi per 13 ed i secondi per 5, ne nascono

due

... e nuove ternarj di 39, [illegible] 65 25, 60
a quali il quadrato di 65 uguaglia due
... a due quadrati di 39, e di 52, e a'
quadrati di 25, e di 60. Quindi dalle
registrate tavole si potranno agevolmente dedurre
le radici tutte dei quadrati, che a due coppie
di quadrati si agguagliano.

Tavola VI dedotta dalla Tavola I.

5	13	25	41	61	85	113	145	181	&c.
5, 3	13, 5	25, 7	41, 9	61, 11	85, 13	113, 15	145, 17	181, 19	&c.
0, 4	0, 12	0, 24	0, 40	0, 60	0, 84	0, 112	0, 144	0, 180	&c.

Tavola VII dedotta dalla Tavola I.

65=5.13	125=5.25	205=5.41	305	425	565	725	905
39, 25	75, 35	123, 45	183, 55	[illegible], 65	319, 75	435, 85	543, 95
52, 60	100, 120	164, 200	244, 300	340, 4[illegible]	452, 560	540, 720	[illegible]24, 900

Tavola VIII. dedotta dalla Tavola I.

13.5	13.25	13.41	13.61			
3[illegible] =	533 =	793 =	1105	1469	1885	2353
1[illegible], 91	205, 117	[illegible]5, 143	425, 169	585, 195	725, 221	905, 247
300, 3[illegible]	492, 520	732, 780	1020, 1092	1358, 1456	1740, 1872	2172, 2340

Tavola IX. dedotta dalla Tavola I

	25.41	25.61	25.85	
[illegible] =	1525 =	2125 =	2825	3625
24[illegible], [illegible]5	427, 875	595, [illegible]325	791, 1375	1015, 1425
96[illegible], 1000	1407, 1500	2040, 2100	27[illegible], 2800	3480, 3600

Metodo II.
di determinare in numeri interi i quadrati, che sono eguali a due quadrati.

La serie armonica a, b, c ha la proprietà, che dalla somma dei due quadrati $a^2-2ac+c^2+b^2$ si può sempre estrarre la radice. Ed in fatti essendo la media armonica $b=\frac{2ac}{a+c}$, l'aggregato dei due quadrati si agguaglia ad $a^2-2ac+c^2+\frac{4a^2c^2}{a^2+2ac+c^2}$ $=\frac{a^4+2a^2c^2+c^4}{a^2+2ac+c^2}$, la cui radice $=\frac{a^2+b^2}{a+c}$.

Poichè le radici dei quadrati, che si cercano, hanno da essere numeri interi, ~~se~~ nella progressione $a, \frac{2ac}{a+c}, c$ ~~la media armonica non è un numero intero~~ si moltiplichino i termini per $a+c$, onde ne risulti la serie armonica in numeri interi $a^2+ac, 2ac, ac+c^2$, da cui si raccolgono i tre quadrati $(a^2-c^2)^2=a^4-2a^2c^2+c^4$, $(2ac)^2=4a^2c^2$, $(a^2+c^2)^2=a^4+2a^2c^2+c^4$. Le radici adunque dei tre quadrati saranno $a^2-c^2, 2ac, a^2+c^2$.

La serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c contiene tutte le ragioni in numeri interi, nelle quali si possono corrispondere c, ed a. Ne nascerà dunque la seguente tavola

Valori di c	Valori di a	Lati dei tre quadrati		
1	2	3	4	5
1	3	8	6	10
2	3	5	12	13
1	4	17	8	17
2	4	12	16	20
3	4	7	24	25
1	5	24	10	26
2	5	21	20	29
3	5	16	30	34
4	5	9	40	41
1	6	35	12	37
2	6	32	24	40
3	6	27	36	45
4	6	20	48	52
5	6	11	60	61
1	7	48	14	50

Valori di c	Valori di a	Lati dei tre quadrati.		
2	7	45	28	53
3	7	40	42	58
4	7	33	56	65
5	7	24	70	74
6	7	13	84	85
1	8	63	16	65
2	8	60	32	68
3	8	55	48	73
4	8	48	64	80
5	8	39	80	89
6	8	28	96	100
7	8	15	112	113
1	9	80	18	82
2	9	77	36	85
3	9	72	54	90
4	9	65	72	97
5	9	56	90	106
6	9	45	108	117
7	9	32	126	130
8	9	17	144	145
1	10	99	20	101
2	10	96	40	104
3	10	91	60	109
4	10	84	80	116
5	10	75	100	125
6	10	64	120	136
7	10	51	140	149
8	10	36	160	164
9	10	19	180	181
1	11	120	22	122
2	11	117	44	125
3	11	112	66	130
4	11	105	88	137
5	11	96	110	146

Valori di c	Valori di a	Lati dei quadrati		
6	11	85	132	157
7	11	72	154	170
8	11	57	176	185
9	11	40	198	202
10	11	21	220	221
&c.				

Col descritto metodo non si trovano in numeri interi i lati dei quadrati tutti, che si agguagliano a due quadrati. Per escludere le frazioni dai lati dei tre quadrati, non è necessario, che le tre quantità in serie armonica sieno numeri interi, ma basta che si agguaglino ad $a\sqrt{n}$, $b\sqrt{n}$, $c\sqrt{n}$, dinotando n qualsivoglia numero intero. Ciò posto saranno i lati dei tre quadrati $n\cdot(a^2-c^2)$, $n\cdot 2ac$, $n\cdot(a^2+c^2)$. La sovrascritta Tavola suppone $n=1$. Determinando n uguale a 2, 3, 4, 5 &c. si moltiplicano immensamente i ternarj dei quadrati. Se per esempio i quadrati di 3, e di 4 si agguagliano al quadrato di 5, sarà vero altresì che $(n\cdot 3)^2+(n\cdot 4)^2$ sono uguali a $(n\cdot 5)^2$. In tal guisa ~~[illegible] della serie armonica si possono ancora esprimere [illegible] i lati dei quadrati saranno~~ ~~$\sqrt{n}\cdot a$, $b\sqrt{n}$, $c\sqrt{n}$ [illegible]~~ $\sqrt{n}\cdot(a^2-c^2)$, $\sqrt{n}\cdot 2ac$, $\sqrt{n}\cdot(a^2+b^2)$ la soluzione del Problema diviene generale.

Merita riflessione, che lo stesso quadrato $(65)^2$ pareggia le due coppie di quadrati $(33)^2$, $(56)^2$; $(63)^2$, $(16)^2$. Inoltre, essendo $65 = 13\cdot 5 = 5\cdot 13$, e dandoci la Tavola $(5)^2=(3)^2+(4)^2$, $(13)^2=(5)^2+(12)^2$, avremo parimente $(13\cdot 5)^2=(65)^2=(13\cdot 3)^2+(13\cdot 4)^2=(39)^2+(52)^2$; $(5\cdot 13)^2=(65)^2=(5\cdot 5)^2+(5\cdot 12)^2=(25)^2+(60)^2$, e quindi il medesimo quadrato $(65)^2$ si agguaglia a quattro coppie di quadrati.

Una simile proprietà compete ad $(65)^2=(13)^2+(44)^2$ $(33)^2+(56)^2=(5\cdot 13)^2+(5\cdot 4)^2=(13\cdot 3)^2+(13\cdot 4)^2$.

Se il lato del quadrato, che si agguaglia a due quadrati, non è numero primo, dai numeri che moltiplicati insieme lo formano, si raccoglieranno spesso nuove coppie di quadrati ad esso uguali. Al lato esempigrazia 100 corrispondono i due lati 28, 96.

So

Se considero $100 = 2\cdot50$, riferendosi al lato 50 i due lati 14, 48, torno a trovare i tre lati $2\cdot50 = 100$, $2\cdot14 = 28$, $2\cdot48 = 96$. Lo stesso addiviene assumendo $100 = 4\cdot25$, a cui corrispondono i lati $4\cdot7 = 28$, $4\cdot24 = 96$. Ma considerando $100 = 20\cdot5 = 5\cdot20$, e dandomi la Tavola i tre lati 5, 4, 3; 20, 16, 12, ne proverranno in ambi gli incontri i lati 100, 80, 60, dimodochè il quadrato $(100)^2$ si eguaglierà soltanto a due coppie di quadrati $(28)^2+(96)^2$, $(60)^2+(80)^2$.

Generalmente si determineranno i quadrati, che sono uguali a due coppie di quadrati prendendo dalla Tavola due ternari di numeri per esempio 13, 12, 5; 17, 8, 15, e moltiplicando il primo per 17, il secondo per 13, onde ne risultino i due ternari 221, 204, 85; 221, 104, 195, e si conchiuderà essere $(221)^2=(204)^2+(85)^2=(104)^2+(195)^2$.

Con simile artifizio si scopriranno i quadrati, che si eguagliano a tre coppie di quadrati. La Tavola mi dà $(130)^2=(126)^2+(32)^2=(66)^2+(112)^2$. Raccolgo dalla stessa $(13)^2=(12)^2+(5)^2$, e quindi $(130)^2=(120)^2+(50)^2$, e perciò $(130)^2$ uguale a tre paja di quadrati. Abbiamo inoltre $(10)^2=(6)^2+(8)^2$, e per conseguenza $(130)^2=(6\cdot13)^2+(8\cdot13)^2=(78)^2+(104)^2$, il che ci manifesta $(130)^2$ uguale a quattro paja di quadrati. E così doveva ritrovarsi avendo osservato che il quadrato $(65)^2$ si eguaglia a quattro coppie di quadrati, ed essendo $130 = 2\cdot65$.

Si potrebbero aggiungere altre riflessioni, ch'io ben volentieri lascio alla industria di chi legge.

Obbietterà qualcuno, che le tre radici $n.(a^2-c^2)$, $n.2ac$, $n.(a^2+c^2)$ sciolgono bensì il Problema in casi infiniti, ma non con total generalità; imperciocchè se a, c sono numeri impari, a^2-c^2, $2ac$, a^2+c^2 si possono divider per 2, e quindi le radici $\frac{a^2-c^2}{2}$, $\frac{2ac}{2}$, $\frac{a^2+c^2}{2}$ soddisfanno al Problema, quantunque sembri evidente, che non dipendano dalla mia soluzione. Affine di sciogliere questo nodo, assumo $(a)=\frac{a+c}{2}$, $(c)=\frac{a-c}{2}$, e la soluzione mi somministra le tre radici $(a)^2-(c)^2$, $2(a)(c)$, $(a)^2+(c)^2$. In cambio di (a) e di (c) sostituisco gli stabiliti valori, e mi si presentano quelle stesse radici $\frac{2ac}{2}$, $\frac{a^2-c^2}{2}$, $\frac{a^2+c^2}{2}$, che si pretendeva, che non potessero dedursi dalla mia soluzione, la quale per conseguenza è compiutamente generale.

Metodo per determinare tutti i triangoli
rettangoli numerici, la cui ipotenusa,
ed i cui lati siano numeri interi.

Metodo per determinare tutti li triangoli rettangoli numerici, la cui ipotenusa e i cui lati siano numeri interi.

Li triangoli rettangoli numerici, nei quali l'ipotenusa, e i due lati si uguagliano a numeri interi, si possono determinare col seguente metodo. Si assuma un numero a ad arbitrio, e siano gli altri due numeri che si cercano $x+n$, x, di tal grandezza, che si adempia l'equazione $x^2+2nx+n^2 = x^2+a^2$, o sia $2nx = a^2-n^2$, onde dividendo per $2n$, $x = \frac{a^2-n^2}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right)$

Dovendo essere x numero intero, egli è necessario che a^2 sia divisibile per n, ed inoltre (?) che sottratto n da $\frac{a^2}{n}$, il residuo $\frac{a^2}{n}-n$ sia numero pari, onde possa dividersi per 2. Poiché a, e conseguentemente a^2 sia numero impari, saranno necessariamente impari n divisore di a^2, ed il quoziente $\frac{a^2}{n}$, e sottraendo da questo il numero impari n, riuscirà pari il residuo $\frac{a^2}{n}-n$, e potrà ricevere la divisione per 2. Che se a, e per conseguenza a^2 è numero pari, conviene che sia tale ancora n, e di tal valore, che $\frac{a^2}{n}$ sia numero pari, acciocché levando da esso il numero pari n, resti $\frac{a^2}{n}-n$ numero pari, e possa dividersi per 2. Con queste osservazioni si determinano tutti i triangoli rettangoli numerici, assegnando ad a ordinatamente i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c.

Dunque $a = 1$, e non avendo l'unità altro divisore che sé stessa, egli è di uopo stabilire $n = 1$, e quindi $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right) = 0 = x$. I tre numeri pertanto saranno 1, 0, 1.

Sia in secondo luogo $a = 2$, $a^2 = 4$, e dovendo $\frac{a^2}{n}$ esser numero pari, non può fissarsi n salvoché $= 2$. Anche qui si troverà $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right) = x = 0$, e ne risulteranno i tre numeri 2, 0, 2.

Mettasi $a = 3$, $a^2 = 9$. Il 9 ha i divisori 1, 3, l'ultimo de' quali si uguaglia ad a. Non considero

il

92

il divisor 9 maggiore di a, riserbandomi di far vedere che i divisori di a^2 più grandi di a non danno numeri nuovi. Facendo n = 1 avevamo i tre numeri 5, 4, 3; ed eguagliandolo a 3, ne nascono i numeri 3, 0, 3.

Pongasi a = 4, a^2 = 16; ed i divisori che servono saranno 2, 4. Se n = 2, scopriremo $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} - n\right)$ = 3; x + n = 5; e ci si presenteranno i numeri 5, 3, 4. Chi facesse n = 4, troverebbe i numeri 4, 0, 4.

Si mette a = 5, a^2 = 25, ed si avranno i due divisori 1, 5. n = 1 mi dà $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} - n\right)$ = 12, x + n = 13, e rivedrò i tre numeri 13, 12, 5. Facendo n = 5, ne nascono i tre numeri 5, 0, 5.

La determinazione di a = 6, a^2 = 36 somministra i divisori 2, 6. Il primo ci dà $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n} - n\right)$ = 8, e per conseguenza i tre numeri 10, 8, 6. Il secondo ci fornisce i tre numeri 6, 0, 6. Benchè 4 sia numero pari, divisore, e più piccolo del 36, non serve all'intento; perchè $\frac{36}{4}$ = 9 è numero impari contro ciò che di sopra ho stabilito.

Dalla supposizione a = 7, a^2 = 49 ne nascono le due serie di numeri 25, 24, 7; 7, 0, 7, secondochè si pone n = 1, n = 7.

Il valore di a = 8 suggerisce i tre divisori 2, 4, 8. Queste tre ipotesi di n = 2, n = 4, n = 8 mi danno le tre serie di numeri 17, 15, 8; 10, 6, 8; 8, 0, 8.

Mi rivolgo ad a = 9, e secondochè faccio n = 1, n = 3, n = 9, ho i ternarj di numeri 41, 40, 9; 15, 12, 9; 9, 0, 9.

Passando ad a = 10; ho i divisori 2, 10, a cui corrispondono le due progressioni 26, 24, 10; 10, 0, 10.

10, 0, 10

$a = 11$ dà i due soli divisori 1, 11, e conseguentemente i numeri 61, 60, 11; 11, 0, 11.

$a = 12$, ed $\hat{a} = 144$ somministrano i divisori 2, 4, 6, 8, 12, ed operando regolarmente ad essi si ha la cinque serie 37, 35, 12; 20, 16, 12; 15, 9, 12; 13, 5, 12; 12, 0, 12.

Le ipotesi di $a = 13$, e di $\hat{a} = 169$ suggerisce i divisori 1, 13, e le due serie di numeri 85, 84, 13; 13, 0, 13.

$a = 14$, ed $\hat{a} = 196$ ci forniscono dei divisori 2, 14, dai quali si deducono le due progressioni 50, 48, 14; 14, 0, 14.

Progredendo in sì fatta guisa, si determineranno tutti li triangoli rettangoli numerici, la cui ipotenusa, e i due lati siano espressi da numeri interi.

In alcuni i tre numeri sono fra loro primi, ed ecco i più qui ritrovati. 1, 0, 1; 5, 4, 3; 13, 12, 5; 25, 24, 7; 17, 15, 8; 41, 40, 9; 61, 60, 11; 37, 35, 12; 85, 84, 13 &c.

In altri triangoli poi i tre numeri dinotanti l'ipotenusa e i lati non sono fra loro primi, ma nascono dal moltiplicare l'ipotenusa e i lati dei triangoli della prima specie per un dato numero. Quei che fin ora ci si sono presentati, li dispongo qui in ordine.

2, 0, 2; 3, 0, 3; 4, 0, 4; 5, 0, 5 &c.

10, 8, 6; 15, 12, 9; 20, 16, 12; &c.

26, 24, 10 &c.

50, 48, 14 &c.

Per esempio i numeri 5, 4, 3 nascono dal porre $a = 3$, ed i numeri 10, 8, 6; 15, 12, 9; 20, 16, 12 traggono l'origine da $a = 6 = 3 \cdot 2$, da $a = 9 = 3 \cdot 3$, da $a = 12 = 3 \cdot 4$, e si agguagliano a 5, 4, 3 molti-

plicati

dicati nei numeri 2, 3, 4.

Avverto che ponendo $n > a$, adempiute per altro le rimanenti regole sopra prescritte, ne risulterebbe un numero negativo. Sia per esempio $a=9$, $n=27$; e si troverà $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right)=\frac{1}{2}(3-27)=-12=x$, $x+n=-12+27=15$; ed i tre numeri saranno $15, -12, 9$. Questa maniera di operare non dà nulla di nuovo, essendo noto, che se $15^2=12^2+9^2$, sarà parimenti $15^2=(-12)^2+9^2$. Ora supposto $a=9$, i numeri $15, 12, 9$ provengono dalla posizione di $n=3$. Facendo $3 : 9 :: 9 : 27$, ed assegnando ad n il valore 27, ci si presentano i numeri $15, -12, 9$. Non altrimenti fatto il numero $a=8$, e ponendo $n=2$, si hanno i numeri $17, 15, 8$. Sia $n=32$ numero terzo proporzionale di $2 : 8$; e ne raccoglieremo $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right)=\frac{1}{2}(2-32)=-15=x$; ed $x+n=-15+32=17$, ed i tre numeri saranno $17, -15, 8$. Ecco dunque la ragione per cui è stato da me stabilito, che il divisore n non sia maggiore di a.

Problema

Dato un numero intero non quadrato
trovar un numero intero quadrato
che moltiplicato pel suddetto
formi un prodotto che
accresciuto d'una
unità s'eguagli
ad un numero quadrato.

Problema

Dato un numero intero non quadrato trovar un numero intero quadrato, che moltiplicato pel suddetto formi un prodotto, che accresciuto per l'unità si agguagli ad un numero quadrato.

Questo Problema è stato sciolto nel Tomo IV. dell'Accademia di Turino dal Chiar.^mo Sig. de la Grange. Io seguendo il suo metodo cercherò d'essere più chiaro, e più breve. Posto $=a$ il dato numero intero non quadrato, si estragga la sua radice, e ne nascerà una frazione decimale $=\frac{b}{c}$, il cui quadrato $\frac{b^2}{c^2}$, supposto che b si estenda all'infinito, sarà eguale ad a. ~~$\frac{b^2}{c^2}$ [illegible]~~, e per conseguenza $b^2 = ac^2$, e ~~molto più~~ $b^2 < ac^2+1$. Siano i numeri cercati x^2, y^2, onde si abbia $x^2 = ay^2+1$. Ci riuscirà di trovare in numeri interi i valori di x, y trasformando la frazione decimale $\frac{b}{c}$ in una frazione continua nel modo che segue. Diviso il numeratore b pel denominatore c, ne risulterà il quoziente q, e rimarrà il residuo $\frac{d}{c}$ minore dell'unità. Si inverta tale frazione così $\frac{c}{d}$, e la divisione darà il quoziente q', e lascerà il residuo $\frac{e}{d}$ minore dell'unità. Rovesciato anche questo, ne provenga il quoziente q'', e sopravanzi $\frac{g}{e}$, la cui inversione $\frac{e}{g}$ somministrerà il quoziente q''', e così di seguito. Le descritte operazioni cangiano la frazione $\frac{b}{c}$ in una frazione continua $\frac{q}{1}+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cfrac{1}{q'''}}}$ &c.

Si avverta, che y è minore di $\sqrt{a}$, perchè dopo

la

la divisione è rimasto un residuo. Se il valore di q' fosse esatto, si avrebbe $q+\frac{1}{q'}=\sqrt{a}$ · ma q' è minore del giusto; dunque $q+\frac{1}{q'}>\sqrt{a}$. Supposto esatto il valore di q'', sarebbe $q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}=\sqrt{a}$: ma q'' è calante; dunque la grandezza $\frac{1}{q''}$ è maggior della vera, e quindi $q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}<\sqrt{a}$. In tal guisa si anderà sempre alternando, e si avrà

$$q<\sqrt{a},\quad q+\frac{1}{q'}>\sqrt{a},\quad q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''}}<\sqrt{a},\quad q+\frac{1}{q'+\frac{1}{q''+\frac{1}{q'''}}}>\sqrt{a}$$

e così di seguito. Fra i valori crescenti, che sempre più si accostano alla esattezza si ha finalmente da trovar quello $\frac{x}{y}$, che soddisfaccia al Problema, onde si abbia $x^2=ay^2+1$, ovvero $x^2-ay^2=1$. Con ~~due~~ esempj metterò in maggior lume le cose dette.

Esempio I.

Sia $a=2$; e col solito artifizio si troverà $\sqrt{2}=\frac{141421356}{100000000}$. Con le seguenti operazioni trovo i valori di q, q', q'', q''' &c.

$\frac{141421356}{100000000}\Big\} 1=q$, $\frac{100000000}{41421356}\Big\} 2=q'$ (resto 17157288)

$\frac{41421356}{17157288}\Big\} 2=q''$ (resto 7106780), $\frac{17157288}{7106780}\Big\} 2=q'''$ (resto 2943728)

$\frac{7106780}{2943728}\Big\} 2=q''''$ (resto 1219324), $\frac{2943728}{1219324}\Big\} 2=q^{V}$ (resto 505080)

$\frac{1219324}{505080}\Big\} 2=q^{VI}$ (resto 209164), $\frac{505080}{209164}\Big\} 2=q^{VII}$ (resto 86752)

$\frac{209164}{86752}\Big\} 2=q^{VIII}$ (resto 35660), $\frac{86752}{35660}\Big\} 2=q^{IX}$ (resto 15432)

$\frac{35660}{15432}\Big\} 2=q^{X}$ (resto 4796), $\frac{15432}{4796}\Big\} 3=q^{XI}$ (resto 1044)

Se la frazione decimale prossimissima a $\sqrt{a}$

esempigrazia $\sqrt{2} = 1,41421356237309$
si estendesse maggiormente, si seguiterebbe
a trovare i quozienti eguali a 2 sino al numero di 16, e ciò
si otterrebbe costantemente, se la detta frazione si dilatasse all'infinito.

Mediante i scoperti quozienti ho la frazione continua
$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}\ \text{\&c.}$$

Si osservi che ho primieramente 1, indi $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, e poscia $1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}$, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}=\frac{41}{29}$, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}=\frac{99}{70}$ &c. Dispongo in serie questi valori aggiugnendovi il termine $\frac{1}{0}$; perchè anche i numeri $x=1$, $y=0$ sciolgono il Problema, essendo $1=2\cdot 0+1$, e scrivo al di sopra di essa serie i quozienti 1, 2, 2, 2, 2, 2 &c.

	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\frac{1}{0}$,	$\frac{1}{1}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{7}{5}$,	$\frac{17}{12}$,	$\frac{41}{29}$,	$\frac{99}{70}$,	$\frac{239}{169}$,	$\frac{577}{408}$,	$\frac{1393}{985}$,	$\frac{3363}{2378}$,	$\frac{8119}{5741}$,	$\frac{19601}{13860}$ &c.

Ella è facile da scoprire la proprietà della nostra serie. Per esempio il numeratore del terzo termine $\frac{3}{2}$ si agguaglia al numeratore del secondo termine moltiplicato per 2 numero sovrapposto più il numeratore del primo termine. Non altrimenti il denominatore del terzo termine pareggia il denominatore 1 del secondo termine moltiplicato per 2 numero sovrapposto più il denominatore 0 del primo termine. Con questo mezzo ho continuata la serie senza seguitar a valermi della frazione continua.

Metta qui sotto la progressione dei quadrati dei numeratori, e dei denominatori della superiore frazione, moltiplicando questi ultimi per 2, e ne noto la differenza.

1		0		1
1		2	$2\cdot 1$	-1
9 =	3^2	8 =	$2\cdot 2^2$	1
49	7^2	50	$2\cdot 5^2$	-1
289 =	17^2	288 =	$2\cdot 12^2$	1
1681 =	41^2	1682 =	$2\cdot 29^2$	-1
9801 =	99^2	9800 =	$2\cdot 70^2$	1
57121 =	239^2	57122 =	$2\cdot 169^2$	-1
332929 =	577^2	332928 =	$2\cdot 408^2$	1
1940449 =	1393^2	1940450 =	$2\cdot 985^2$	-1
11309769 =	3363^2	11309768 =	$2\cdot 2378^2$	1
65918161 =	8119^2	65918162 =	$2\cdot 5741^2$	-1
384199201 =	19601^2	384199200 =	$2\cdot 13860^2$	1

Soddisfanno adunque al Problema le coppie di numeri 1, 0; 3, 2; 17, 12; 99, 70; 577, 408; 3363, 2378; 19601, 13860 &c.
Le rimanenti coppie di numeri 1, 1; 7, 5; 41, 29 &c. servirebbero al Problema, che si chiedesse $x^2+1=2y^2$

Esempio II.

Pongasi $a=5$, e per conseguenza $\sqrt{5}$ $\frac{22360679}{10000000}$ &c. Nel seguente modo trova i valori di q, q', q'', q''' &c

$\frac{22360679}{10000000}\Big) 2 = q$ — 557264 / 10000000 / 2360679 $\Big) 4 = q'$

131543 / 2360679 / 557264 $\Big) 4 = q''$ — 31112 / 557264 / 131543 $\Big) 4 = q'''$

7095 / [illegible] / 31112 $\Big) 4 = q''''$ — 2732 / [illegible] / 7095 $\Big) 2 = q^{V}$

1631 / [illegible] / 2732 $\Big) 2$

Il trovarsi il settimo quoziente $=2$ è uno

sbaglio

sbaglio provveniente dall'aver espresso $\sqrt{5}$ con un numero troppo scarso di cifre.

I ritrovati quozienti somministrano la frazione continua $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}}}$ &c.

Ho di primo luogo 2; poscia $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$, ad indi $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}=\frac{38}{17}$, $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}}=\frac{161}{72}$ &c.

Messo in serie questi valori, aggiungendovi come nell'Esempio I. per primo termine $\frac{1}{0}$ e noto al dissopra di essa serie i quozienti 2, 4, 4, 4, 4, 4 &c.

$$\begin{matrix} & 2, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{9}{4}, & \frac{38}{17}, & \frac{161}{72}, & \frac{682}{305}, & \frac{2889}{1292}, & \frac{12238}{5473}, & \frac{51841}{23184} & \text{\&c.} \end{matrix}$$

Si può continuar questa serie anche colla regola spiegata nel primo Esempio.

Pongo qui sotto la serie dei quadrati de' numeratori, e dei denominatori delle rinvenute frazioni, e moltiplico questi ultimi per 5. e noto come nel primo Esempio le differenze.

1		0		1
4 =	2^2	5 =	$5\cdot1^2$	−1
81 =	9^2	80 =	$5\cdot4^2$	1
1444 =	$\overline{38}^2$	1445 =	$5\cdot\overline{17}^2$	−1
25921 =	$\overline{161}^2$	25920 =	$5\cdot\overline{72}^2$	1
465124 =	$\overline{682}^2$	465125 =	$5\cdot\overline{305}^2$	−1
8346321 =	$\overline{2889}^2$	8346320 =	$5\cdot\overline{1292}^2$	1
149768644 =	$\overline{12238}^2$	149768645 =	$5\cdot\overline{5473}^2$	−1
2687489281 =	$\overline{51841}^2$	2687489280 =	$5\cdot\overline{23184}^2$	1

Viene adunque sciolto il Problema dalle coppie di numeri 1, 0; 9, 4; 161, 72; 2889, 1292; 51841, 23184 &c. Anche qui le restanti coppie di numeri 2, 1; 38, 17; 682, 305;

12238

12234, 5433 &c. soddisfarebbero al Problema $x^2 + 1 = 5y^2$.

Esempio III.

Si proponi di: $a = 13$ - serve allo esempio primo recato dal Signor de la Grange. Coll'ajuto delle operazioni analoghe a quelle usate negli esempj primo, e secondo si raccoglierà dalla frazione $\frac{36055195}{10000000}$ &c. $= \sqrt{13}$ la sottoscritta progressione di quozienti 3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1 &c, e da questa la frazione continua

$$3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1}}}}}} \text{ \&c.}$$

la quale mi dà primieramente $\frac{3}{1}$, ed indi $3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1}$, $3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{2}$, $3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{3}$ &c.

Dispongo in serie tali valori colla solita aggiunta di $\frac{1}{0}$, scrivendovi al disopra ordinatamente i quozienti

$$\overset{3}{\frac{1}{0}},\ \overset{1}{\frac{3}{1}},\ \overset{1}{\frac{4}{1}},\ \overset{1}{\frac{7}{2}},\ \overset{1}{\frac{11}{3}},\ \overset{6}{\frac{18}{5}},\ \overset{1}{\frac{119}{33}},\ \overset{1}{\frac{137}{38}},\ \overset{1}{\frac{256}{71}},$$

$$\overset{1}{\frac{393}{109}},\ \overset{6}{\frac{649}{180}},\ \overset{1}{\frac{4287}{1189}},$$

Si può continuar questa serie anche colli artifizio spiegato nelli Esempio I.

Veggansi disposti in serie i quadrati dei numeratori, ed i quadrati dei denominatori multiplicati per 13, e di più notate le loro differenze

1		0		1
9 =	$\hat{3}$	13 =	13.1	−4
16 =	$\hat{4}$	13 =	13.1	3
49 =	$\hat{7}$	52 =	$13.\hat{2}$	−3
121 =	$\hat{11}$	117 =	$13.\hat{3}$	4
324 =	$\hat{18}$	325 =	$13.\hat{5}$	−1
14161 =	$\hat{119}$	14157 =	$13.\hat{33}$	4
18769 =	$\hat{137}$	18772 =	$13.\hat{38}$	−3
65536 =	$\hat{256}$	65533 =	$13.\hat{71}$	3
154449 =	$\hat{393}$	154453 =	$13.\hat{109}$	−4
421201 =	$\hat{649}$	421200 =	$13.\hat{180}$	1
18378369 =	$\hat{4287}$	18378373 =	$13.\hat{1189}$	−4

&c.

Merita primieramente d'essere avvertita la progressione dei quozienti, la quale comincia col tre, e poi seguita con quattro unità, col sei, con quattro unità, col sei e così di seguito all'infinito, supposta esatta la $\sqrt{13}$, cioè a dire composta da infinite cifre:

La differenza fra $\hat{x}$ e $13\hat{y}$ dal primo termine della soprascritta tavola sino al quinto inchiusivamente sono 1, −4; 3, −3; 4. Le stesse differenze ma negative s'incontrano dal sesto termine sino al decimo inchiusivamente. Dall'undecimo termine sino al decimoquinto le medesime differenze tornano positive, e con questo ordine si prosegue costantemente.

Le coppie di numeri prima 1, 0, undecima 649, 180 sciolgono il Problema, che viene similmente sciolto dai binarj di numeri vigesimo primo, trigesimo primo &c.

Colla stessa occasione si soddisfà ai Problemi,

che

che richiedessero le differenze -1, ± 3, ± 4, e si comprende essere impossibile la soluzione, quando si volesse che le differenze ricevessero i valori ~~[illegible]~~ ± 2

Qualunque numero intero non quadrato sia $= a$, si può sempre sciogliere il Problema $x^2 = ay^2 + 1$; perchè il primo binario di numeri $x=1$, $y=0$ somministra la differenza $=1$, e si osserva sempre la legge, che dopo un dato periodo torni a comparire la medesima differenza, della qual verità ne fanno fede gli esempj recati.

Se si fosse stabilito $a = 11$, la cui radice $3,3166244$, si sarebbero trovate le seguenti progressioni di quozienti, di frazioni, e di differenze $x^2 - ay^2$

Quozienti	3	3	6	3	6	3	6
Frazioni	$\frac{1}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{63}{19}$	$\frac{199}{60}$	$\frac{1257}{379}$	$\frac{3970}{1197}$
Differenze	1	-2	1	-2	1	-2	1

Si osservi, che le differenze sono costantemente a vicenda $1, -2$, e che non ammettono soluzione le formole $x^2 - 11y^2 = -1$, $x^2 - 11y^2 = 2$.

Determinare gli infiniti ternarj di numeri
interi, i quadrati di due de' quali sieno
eguali a quello del terzo

Determinare gli infiniti ternarj di numeri interi, i quadrati di due dei quali siano [illegible] eguali al quadrato del terzo.

Siano x, y, p i cercati tre numeri, e per l'ipotesi si abbia $x^2+y^2=p^2$. [illegible] $p=x+n$, e per conseguenza $p^2=x^2+2nx+n^2$; [illegible] effettuata la sostituzione ne proverrà $x^2+y^2=x^2+2nx+n^2$, o sia $\frac{y^2-n^2}{2n}=x$. [illegible] $y^2=2n$, acciocchè sparisca la divisione per n, e sostituito [illegible] $\frac{2n-n^2}{2n}=\frac{2-n}{2}=x$. E poichè $p=x+n$, ne risulterà $p=\frac{2+n}{2}$, e perciò i tre numeri, di cui [illegible] in [illegible], saranno:

$x=\frac{2-n}{2}$; $y=\sqrt{2n}$; $p=\frac{2+n}{2}$.

[illegible] dalla scoperta formola.

Dovendo x, e p essere numeri interi, se 2 [illegible] ambo pari o dispari, $2-n$, $2+n$ saranno numeri pari divisibili per 2, e quindi saranno numeri interi [illegible] di x, e p [illegible] qualora 2, ed n siano [illegible]. Ciò non può avvenire [illegible] l'altro dispari. Si stabilisca uno pari, e l'altro dispari. [illegible] qualunque numero intero di y uguale a [illegible] $=y^2=2n$. [illegible] si prenda [illegible] due fattori [illegible] colla condizione che [illegible] maggiore di n, e se questi [illegible] ambo pari, o dispari, si [illegible] saranno [illegible] i valori di x, y, p in numeri interi, che sia $x^2+y^2=p^2$ [illegible] proprietà [illegible]

[illegible]

Sia $y=1$ [illegible] $y^2=1=2n$. In [illegible] non si può stabilire, salvochè [illegible] $2=1$, $n=1$ [illegible] la prescritta condizione [illegible] non si [illegible] fissare $y=1$ [illegible] $=5$ [illegible]

Esempio [illegible] $=5$; [illegible] $=5$

Secondo $y=2$, [illegible] $y^2=4=2n$ [illegible] si ponga [illegible]

$2=2$

$z = 2$, $n = 2$, z non è maggiore di n. Se pongo $z = 4$, ricevo pure contro la condizione, che z, ed n siano ambo pari, o dispari. Per la qual cosa resta vietato il mettere $y = 2$.

Esempio 3.

Si faccia $y = 3$, $y^2 = zn = 9$. Gl'unici due fattori, che servono, sono $z = 9$, $n = 1$, dai quali ne risultano $x = \frac{z-n}{2} = 4$, $y = 3$, $p = \frac{z+n}{2} = 5$. Questo è il minimo valore, che possa assegnarsi ad y.

Esempio 4.

Stabilisco $y = 4$, $y^2 = zn = 16$. I due fattori non possono essere $z = 16$, $n = 1$, perchè il primo è pari, ed il secondo dispari. Non così succede dei due fattori $z = 8$, $n = 2$, che sono ambo pari, dai quali provengono quindi $x = \frac{z-n}{2} = 3$, $y = 4$, $p = \frac{z+n}{2} = 5$. Non si può porre $z = 4$, $n = 4$, perchè z non sarebbe maggiore di n.

Seguitando ad attribuire valori ad y giusta l'ordine dei numeri naturali, non vi sarà in fine alcuno, a cui non corrisponda una, o più terne di numeri forniti della cercata proprietà. Il seguente esempio somministra più terne di numeri.

Esempio 5.

Sia $y = 12$, $y^2 = zn = 144$. Esclusi i fattori $z = 144$, $n = 1$; $z = 16$, $n = 9$; $z = 48$, $n = 3$, perchè uno è pari, e l'altro dispari, vengono ad uso i fattori $z = 72$, $n = 2$; $z = 36$, $n = 4$; $z = 18$, $n = 8$; $z = 24$, $n = 6$; che somministrano i quattro ternarj di numeri.

$x = 35$, $y = 12$; $p = 37$; ...
$x = 480$; $y = 592$; $p = ...$
$x = 225$, $y = 272$; $p = 353$; ...
$x = 9...$, $y = 12$; $p = ...$

I nostri ternari sono di due specie: nella prima i tre numeri sono tra loro primi, nella seconda ricevono una comune misura maggiore dell'unità. Siano dati i valori di z, e di n. Si cerchi la massima loro comune misura k, e se fatta la divisione, i quozienti sono ambo dispari, allora i numeri x, y, p accetteranno k per comune misura. Che, se uno quoziente sarà pari, e l'altro impari, i tre numeri avranno per massima comune misura $\frac{1}{2}k$.

Esempio 1.

Sia $z = 361$, $n = 4$; la massima comune misura $= 4$. Dalla divisione ne nascono i quozienti 4, 1 ambo impari; ... i tre numeri dal 4. saranno misurati:
$x = 161$, $y = 12$, $p = 20$.

Esempio 2.

Sia $z = 24$, $n = 60$; la massima comune misura $= 6$; poichè effettuata la divisione ne nascono i due quozienti 4, 10 l'uno pari e l'altro dispari, i tre numeri $x = 9$ ... accetteranno soltanto la divisione per $\frac{6}{2} = 3$.
$y = 12$, $p = 15$ ...

Non ogni diversa coppia di valori di z, n somministra diversi ternari; ...

accadendo spesso che due coppie z, n; Z, N ~~scam~~ diano lo stesso ternario diversamente disposto, cadendo in primo luogo quel numero, che occupava il secondo luogo e viceversa. Mi metto sotto gli occhi i ~~due~~ ~~ternari~~

~~$x = \frac{z-n}{2}$~~, $y = \sqrt{zn}$, $\rho = \frac{z+n}{2}$

$X = \frac{Z-N}{2}$, $Y = \sqrt{ZN}$, $\mathfrak{P} = \frac{Z+N}{2}$

e suppongo ~~nessar~~ $\frac{Z-N}{2} = \sqrt{zn}$ (1),

$\sqrt{ZN} = \frac{z-n}{2}$ (2), $\frac{Z+N}{2} = \frac{z+n}{2}$ (3)

Dalla prima equazione abbiamo $N = Z - 2\sqrt{zn}$ (4)

Sostituito questo valore nella terza troveremo

$2Z - 2\sqrt{zn} = z+n$, e perciò $Z = \frac{z+2\sqrt{zn}+n}{2}$ (5)

e ponendo questo valore nella quarta equazione si presenterà

$N = \frac{z-2\sqrt{zn}+n}{2}$. Assegnati a Z, e ad N queste grandezze, ne risulterà

$X = \frac{Z-N}{2} = \sqrt{zn}$, $Y = \sqrt{ZN} = \frac{z-n}{2}$

$\mathfrak{P} = \frac{z+n}{2}$ quindi $X = y$, $Y = x$, $\mathfrak{P} = \rho$.

Esempio

Sia $z = 9$, $n = 1$: si faccia $Z = \frac{z+2\sqrt{zn}+n}{2} = 8$

$N = \frac{z-2\sqrt{zn}+n}{2} = 2$. $z = 9$, $n = 1$ somministrano il ternario $x = 4$, $y = 3$, $\rho = 5$; e $Z = 8$, $N = 2$ ci danno il ternario $X = 3$, $Y = 4$, $\mathfrak{P} = 5$, i quali ternari sono composti degli stessi numeri, che variano solo nella disposizione.

Soluzione
di un Problema aritmetico

Problema

Siano i quattro numeri posti in serie aritmetica x, $x+2n$, $x+4n$, $x+6n$, si dimanda che la somma dei tre ultimi $= 3x+12n$ moltiplicata nella somma dei due medj $2x+6n$ [illegible] $= 6x^2+42nx+72n^2$, che si eguagli al cubo il cui lato $x+n$ medio aritmetico fra i due primi numeri x, $x+2n$.

Se così è il premesso prodotto dee esser divisibile per $x+n$. Fatta la divisione ne nasce il quoziente $6x+36n+\frac{36n^2}{x+n}$, il quale dovendo [illegible] essere numero intero, ne segue che debba esser tale anche la frazione $\frac{36n^2}{x+n}$.

Sia $n=1$, ed $x+n = x+1$ dovrà essere eguale ad uno dei [illegible] numeri 36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2. Non [illegible] a nessun numero [illegible] perchè x [illegible]rebbe [illegible] [illegible]; dunque restano due [illegible] $x+1 = 3$, $x+1 = 9$, onde si abbia [illegible] $x=8$, [illegible] o a 4 [illegible]. Ciò $\frac{36n^2}{x+n}$ eguale [illegible], o a 4 [illegible] il detto quoziente [illegible] due valori 60, 48, [illegible] di $x+1$, vale [illegible] si eguaglia ai quadrati [illegible] o a 9, o a 81; e quindi [illegible] $n=1$ non serve al nostro [illegible] ipotesi.

Sia $n=2$, onde $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{144}{x+2} = \frac{72}{\frac{1}{2}x+1}$.

I divisori di 72 sono 72, 36, 24, 18, [illegible] $8.6.4$ 3.2. Di questi divisori [illegible] che [illegible] la condizione [illegible] $6x+36n+\frac{36n^2}{x+n}$ sia eguale al quadrato di $x+n$ [illegible] il 6, che ne dà $\frac{1}{2}x = 5$, ed $x=10$. In fatti assegnato [illegible] questo valore abbiamo il detto [illegible] $60+72+12 = 144 = \overline{x+n}^2 = 12 \cdot 12$.

I quattro numeri cercati adunque sono 10, 14, 18, 22, la somma 54 dei tre ultimi dei quali moltiplicata per la somma 32 dei due medi ci dà il prodotto 1728 ch'è il cubo del numero 12 medio aritmetico fra i due primi numeri 10, 14.

Aggiungo che i quattro numeri determinati sono gli unici, ai quali la proprietà convenga dal problema richiesta. Se in vece il divisore 6 prendessimo il immediatamente più piccolo 4, ed il supponessimo eguale ad $\frac{1}{2}x+1$, avremmo $x = 6$, ed i quattro numeri sarebbero 6, 10, 14, 18. La somma dei tre ultimi è 42, e quella de' due medj parimenti è 24, ed il prodotto $42 \cdot 24 = 1008$ supera il cubo 512 del numero 8 medio aritmetico fra 6, e 10: Lo stesso mi succede facendo scelta dei divisori ancora più piccoli 3, 2.

Che se ci appigliassimo al divisore 8 immediatamente maggiore di 6, avremmo $\frac{1}{2}x+1 = 8$, e perciò $x = 14$, ed i quattro numeri corrispondenti a questa ipotesi 14, 18, 22, 26. L'aggregato 66 dei tre numeri più grandi si moltiplichi per l'aggregato 40 dei due medj, ed il prodotto 2640 (tutto al contrario di ciò che abbiamo notato nel caso ora considerato) verrà superato dal cubo 4096 del numero 16 medio aritmetico fra i due primi numeri 14, 18. S'allontana viemmaggiormente dall'eguaglianza fra i detti prodotto, e cubo, applicando il calcolo ai divisori più grandi dello 8.

Siamo venuti alla supposizione di $n = 3$,

ed avremo

ed avremo $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{324}{x+3} = \frac{108}{\frac{1}{3}x+1}$. I divisori di 108 sono 108, 54, 36, 27, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, fra i quali non sono ... salvo che gl'impari 3, 9, 27 onde detraendo da essi l'unità, resti $\frac{1}{3}x$, e per conseguenza anche x numero razionale. ... Ponendo $\frac{1}{3}x+1 = 3$, ed $x = 6$, onde ne risultano i numeri 6, 12, 18, 24. Moltiplicando 54 somma dei tre ultimi per 30 somma dei due medii, ed il prodotto 1620 eccede 729 cubo del num.° 9 medio aritmetico fra 6 e 12.

Avverrebbe il contrario ponendo $\frac{1}{3}x+1 = 9$, e determinando x = 24, ed i quattro risultanti numeri 24, 30, 36, 42; imperciocchè 30 + 36 + 42 = 108 moltiplicato in 30 + 36 = 66 dà il prodotto 7128 molto più piccolo di 19683 cubo di 27 medio aritmetico fra 24 e 30. Peggio succederebbe ponendo $\frac{1}{3}x+1 = 27$.

Nella supposizione adunque di n = 3 non si possono trovare quattro numeri forniti delle condizioni volute dal Problema.

Pongasi n = 4, e ne risulterà $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{576}{x+4} = \frac{144}{\frac{1}{4}x+1}$. Il numero 144 ha i seguenti divisori 144, 72, 48, 36, 24, 18, 16, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2. Scelto il 3, ... si hanno i numeri 4, 12, 20, 28, ed il prodotto 1920 della somma dei tre ultimi nella somma dei due medii supera il cubo di $\frac{4+12}{2} = 8$ che si eguaglia a 512. Al contrario il divisore

... si determina numeri tali 8, 16, 24, 32 che il prodotto di 16+24+32 = 72 moltiplicato in 16+24 = 40, cioè a dire 1440 resta superato dal cubo 1728 del numero 12, medio aritmetico fra 8, e 16. Il divisore 8 e gli altri più grandi ci daranno cubi, che ai relativi prodotti corrisponderanno in sempre maggior proporzione.

Mettendo $n = 5$, si ha $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{180}{\frac{1}{5}x+1}$. Al numero 180 convengono i sovrapposti divisori 180, 90, 60, 45, 36, 30, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2. Vengono ad uso i soli impari, acciocchè $\frac{1}{5}x$ e conseguentemente anche x, sia numero pari giusta una delle condizioni del problema. Scelto fra essi il massimo 3 [illegible] risultano i numeri 10, 20, 30, 40 ed il prodotto di 90·50 = 4500 è maggiore di 3375 cubo di 15 = 10120.

Ma facendo ricorso al divisore 5, ci si presentano i numeri 20, 30, 40 ... il prodotto 120·70 = 8400 [illegible], il cubo $\overline{25}^3 = 15625$, cioè al rovescio è più grande del mentovato prodotto. Più si allontanerebbe dalla equalità che facesse la prova negli altri divisori impari 9, 15, 45.

Fingasi $n = 6$, e sarà $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{216}{\frac{1}{6}x+1}$; i divisori di 216 sono 216, 108, 72, 54, 36, 27, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2. Dunque $\frac{1}{6}x+1 = 2$, è però $x = 6$, ed ho i quattro numeri 6, 18, 30, 42. Il prodotto

90·48

90 . 48 = 4320 dei tre ultimi numeri
raccolti in una somma nella somma dei due
medj supera il cubo 1728 del numero
in medio aritmetico, fra 6, e 18. Lo stesso
succede [illegible] cambiando il divisore 3, di modo
che sia $x = 12$, e ne risultino i quattro
numeri 12, 24, 36, 48; imperciocchè
24+36+48 = 108 moltiplicato in 24+36=
60 mi dà il prodotto 6480 maggiore
di 5832 cubo di 18. Ma progredendo
al divisore 7, avremo $x = 18$, ed i quattro
numeri 18, 30, 42, 54, ed in questo
caso il prodotto di 30+42+54 = 126 in
30+42 = 72 eguale a 9072 riesce mi=
nore del cubo di 24 = $\frac{18+30}{2}$ eguale
a 13824. Molto più ciò interverrà
facendo uso dei divisori più grandi.
Posto ad $n = 7$, onde si avrà $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{252}{\frac{1}{7}x+1}$.
Il numero 252 riconosce, per suoi divisori,
252, 126, 84, 63, 42, 36, 28, 21,
18, 14, 12, 9, 7, 6, 4, 3, 2. Esclusi
per la ragione sopra allegata i numeri
contenuti dal divisore 3, che sono
impari, comincerò da $x = 14$, ed i quattro numeri
14, 28, 42, 56, e trovo che il prodotto
di 28+42+56 = 126 in 28+42 = 70
eguale ad 8820 è superato dal cubo
di $\frac{14+28}{2} = 21$ eguale a 9261.
Assegnato ad n qualsivoglia numero impari
maggiore del 7, accaderà sempre che
fatta scelta anche del più piccolo divisore
impari 3, il prodotto fra la somma dei
tre ultimi numeri, e la somma de' due
medj,

medj sia minore del cubo del numero medio aritmetico fra i due numeri primi. e quindi in nessuna di queste ipotesi si possono trovare i quattro numeri, che soddisfacciano al problema.

[illegible]ngo $n=8$, e ne viene $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{[illegible]}{\frac{1}{8}x+1}$

I divisori di 288 sono 288, 144, 96, 72, 48, 36, 32, 24, 18, 16, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2. L'ultimo divisore [illegible] $x=8$, ed i quattro numeri [illegible] 8, 24, 40, 56. il [illegible] volte nominato prodotto si eguaglia a [illegible], ed essendo il cubo di $\frac{8+24}{2}=16$ eguale a 4096. il divisore 3 determina i quattro numeri 16, 32, 48, 64, il prodotto dell'aggregato dei tre ultimi numeri nell'aggregato dei due medj eccede [illegible], ed il cubo di $\frac{16+32}{2}=24$ eguale a 13824 è maggiore di detto prodotto. [illegible] disuguaglianza si [illegible]rebbe applicando il [illegible] ai divisori più grandi.

Sia $n=10$, e avremo $\frac{36n^2}{x+n} = \frac{3[illegible]}{\frac{1}{10}x+1}$

I divisori di 360 sono 360, 180, 120, 90, 72, 60, 45, 40, 36, 30, 24, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2. Il divisore 2 determina $x=10$, ed i quattro numeri 10, 30, 50, 70. Il prodotto di 150.80 = 12000 supera il cubo di 20 ch'è 8000. Al contrario il divisore 3 stabilisca $x=20$, ed i quattro numeri 20, 40, 60, [illegible];

l'aggregato 140 dei tre ultimi de' quali moltiplicato nell'aggregato 100 [illegible] numeri [illegible] il prodotto [illegible] minore di [illegible] cubo di 30.

[illegible] $n = 12$, e [illegible] $\frac{30n^2}{x+n} = \frac{432}{\frac{1}{12}x+1}$. Il numero 432 ha [illegible] divisori 432, 216, 144, 108, 72, 54, 48, 36, 27, 24, 18, 16, 12, 9, 8, [illegible], 4, 3, 2. A' [illegible] [illegible] corrispondono i quattro numeri 12, 36, 60, 84. Il [illegible] numeri [illegible] di 36+60+84 = 180 [illegible] 36+60 = [illegible] uguale a 77760 supera il cubo di $\frac{12+36}{2}$ = 24 uguale a 13824. Il [illegible]

3 Determina i numeri 24, 48, 72, 96, il prodotto 216.120 = 25920, il [illegible] $\overline{36}^3$ [illegible] 46656 [illegible] in questa [illegible] [illegible] tutto e rovescio il cubo accade [illegible] il prodotto

[illegible] $n = 14$, onde [illegible] $\frac{30n^2}{x+n} = \frac{30.14}{\frac{1}{14}x+1}$

[illegible] dei minimi divisori [illegible] [illegible] il [illegible] prodotto 23520 maggiore [illegible] cubo di 28 medio [illegible] numeri in aritmetica, [illegible] i primi due numeri [illegible] [illegible] 14, 4[illegible], [illegible]0, 98. Il [illegible] [illegible] adoperando il divisore 3, che [illegible] determina i quattro numeri 28, 56, 84, 112; [illegible] il prodotto 252.140 = 35280 è minore del cubo $\overline{42}^3$ = 74088.

[illegible] la supposizione di $n = 16$ mi dà $\frac{30n^2}{x+n} = \frac{30.16}{\frac{1}{16}x+1}$, [illegible] il minimo divisore [illegible] il [illegible] 30.16, ho i quattro numeri [illegible] 48, 80, 112. Il prodotto di 48+80+112

[illegible]

122

128

[illegible] 24 [illegible] in 44+4 [illegible], che si [illegible]
a 30 > 20, è superato dal [illegible] del
[illegible] $\frac{16+48}{2} = 32$, che si uguaglia
a 32 > 6[illegible]. Gli altri divisori determinerebbero [illegible] grandi di [illegible] corrispondenti
[illegible].
Qualunque [illegible] valore di n maggiore di [illegible]
[illegible] a [illegible] sempre più grandi dei [illegible]
[illegible] [illegible].
[illegible] chiaramente dimostrato come i numeri
10, 14, 16, 22 gli unici, [illegible] la
proprietà conveniente del proposto problema
[illegible], il che [illegible]

Dissertazioni,
e
scritti Geometrici

Soluzione del Problema proposto dal Signor
Sarti maestro di musica l'anno 1776.

Soluzione del Problema proposto dal Sig. Sarti Maestro di Musica l'anno 1776.

Determinare un Triangolo rettangolo fornito della proprietà, che il rettangolo de' suoi due lati più il rettangolo di uno de' lati nell'ipotenusa si agguagli al quadrato dell'ipotenusa.

Quel lato, che prendo come dato, lo nomino a, e l'altro lato lo chiamo x, onde l'ipotenusa si agguagli a $\sqrt{a^2+x^2}$. Le condizioni del problema ci guidano alla formola $ax + x\sqrt{a^2+x^2} = a^2+x^2$. Trasporto il termine ax, e trovo $x\sqrt{a^2+x^2} = a^2-ax+x^2$, ed alzando al quadrato $a^2x^2+x^4 = a^4-2a^3x+a^2x^2+2a^2x^2-2ax^3+x^4$, e per conseguenza $2ax^3-2a^2x^2+2a^3x-a^4=0$, e dividendo per a; $2x^3-2ax^2+2a^2x-a^3=0$

Pongo $x^2=ay$, ed effettuata la sostituzione trovo $2axy-2a^2y+2a^2x-a^3=0$; e dividendo per a, $2xy-2ay+2ax-a^2=0$; Faccio $a-x=z$, onde ne risulti $x=a-z$, e sostituendo mi si presenta $-2yz+2a^2-2az-a^2=0$, ovvero $\overline{a+y}.z=\frac{a^2}{2}$.

Fra gli assintoti AD, AK (Fig. 1.) descrivo l'iperbola HEF, che segnata l'assissa AB = a, e l'ordinata BE = ½a, passi pel punto E: Posta AC = a+y, e perciò BC = y, sarà CF = z; e poiché z+x = a, tagliata AD = a, e condotta DG parallela ad AC, e continuata CF sino in G, sarà GF = x. Si prolunghi AE finché intersechi la DG nel punto I, e col vertice I, all'asse IG, e col parametro IB = a si delinei la parabola

apolloniana

apolloniana IFK, la quale taglierà la iperbola nel punto F: dico che GF sarà il lato cercato del nostro triangolo; dimodochè condotta FL parallela ad AC, e poscia la diagonale DL, sarà DIL il triangolo che si cerca.

La dimostrazione si trova retrocedendo dietro la traccia dell'analisi. Ed in fatti per l'equazione all'iperbola abbiamo $\overline{a+y}\cdot z = \frac{a^2}{2}$: ma $z = a-x$; dunque $\overline{a+y}\cdot\overline{a-x} = \frac{a^2}{2}$. E poichè per l'equazione alla parabola $y = \frac{x^2}{a}$, fatta la sostituzione scopriremo $\overline{a+\frac{x^2}{a}}\cdot\overline{a-x} = \frac{a^2}{2}$, ossia $a^2+x^2-ax-\frac{x^3}{a} = \frac{a^2}{2}$, ovvero $\frac{a^2}{2}+x^2-ax-\frac{x^3}{a} = 0$, e moltiplicando per $2a^2$, $a^4+2a^2x^2-2a^3x-2ax^3 = 0$. Aggiungo $a^2x^2+x^4$ da entrambe le parti, e trovo $a^2x^2+x^4 = a^4+3a^2x^2-2a^3x-2ax^3+x^4$, ed estratta la radice, $x\sqrt{a^2+x^2} = a^2-ax+x^2$, e finalmente $ax+x\sqrt{a^2+x^2} = a^2+x^2$; il che &c.

Volendo ridurre a computo il valore di x, si faccia svanire il secondo termine dell'equazione $x^3-2ax^2+a^2x-\frac{a^3}{2} = 0$ col porre $x = p+\frac{2}{3}a$, onde ci si presenti $p^3+\frac{2}{3}a^2p-\frac{13}{54}a^3 = 0$. La formola Cardanica ci insegna essere $p = \sqrt[3]{\frac{13a^3}{108}+\sqrt{\frac{169a^6}{(108)^2}+\frac{8a^6}{(27)^3}}} + \sqrt[3]{\frac{13a^3}{108}-\sqrt{\frac{169a^6}{(108)^2}+\frac{8a^6}{(27)^3}}}$, e perciò essendo $(108)^2 = (27)^2\cdot 16$, e quindi $\frac{8}{(27)^2} = \frac{8\cdot 16}{(27)^2\cdot 16} = \frac{128}{(108)^2}$

$p = a\sqrt[3]{\frac{13+\sqrt{297}}{108}} + a\sqrt[3]{\frac{13-\sqrt{297}}{108}} =$ [illegible]

$a\sqrt[3]{\frac{26+\sqrt{1188}}{216}} + a\sqrt[3]{\frac{26-\sqrt{1188}}{216}} =$ [illegible] $=$

$\frac{a}{6}\left(\sqrt[3]{26+\sqrt{1188}} - \sqrt[3]{-26+\sqrt{1188}}\right)$ [illegible]. Ora

Ora $\sqrt{1188} = 34,467335$ pross. [illegible] prossimamente;

laonde

laonde $p = \frac{a}{6}\cdot(\sqrt[3]{60,4607375} - \sqrt[3]{5,4607375})$
Ma $\sqrt[3]{60,4607375} = 3,925$ prossimamente,
$\sqrt[3]{5,4607375} = 2,258$ pr.^{te}; dunque
$p = \frac{a}{6}\cdot 1,667$; ed essendo $x = p + \frac{1}{3}a$
ne raccoglieremo $x = \frac{a}{6}\cdot 1,667 + \frac{1}{3}a$
$= \frac{a}{6}\cdot 3,667 = a\cdot 0,611$, quantità
un po minore di $\frac{2}{3}a = 0,666$ &c.

Alle condizioni del problema soddis=
fa parimente la formola $ax + a\sqrt{a^2+x^2} =$
a^2+x^2; la quale si costruisca con eleganza
ponendo $\sqrt{a^2+x^2} = y$, onde si abbia
$ax + ay = y^2$, e per conseguenza
$ax + \frac{1}{4}a^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$, ossia
$a\cdot\overline{x+\frac{1}{4}a} = (y-\frac{1}{2}a)^2$.

Col semiasse $IL = a$ (fig. 2.) si delinei
l'iperbola LE confacente all'equazione
$a^2+x^2 = y^2$, e segnata l'ascissa $ID = x$, sarà
l'ordinata DE y. Divisa poscia $IL = a$
per metà nel punto A, e tirata BAC paral=
lela ad ID, e tagliata $AB = \frac{1}{4}a$, all'asse
BC, col vertice in B, e col parametro IL
$= a$ descrivasi la parabola $IBLE$ propria
dell'equazione $a\cdot\overline{x+\frac{1}{4}a} = (y-\frac{1}{2}a)^2$, la
quale passerà per i punti I, L, ed interse=
cando l'iperbola nel punto E, determinerà
$ID = x$ lato cercato del triangolo DIL, la
cui ipotenusa $DL = \sqrt{a^2+x^2} = DE = y$.

Dimostrazione. Per l'equazione alla
parabola abbiamo $ax + \frac{1}{4}a^2 = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$,
e quindi $ax + ay = y^2$: ma per l'equazione
all'iperbola $y = \sqrt{a^2+x^2}$; dunque
$ax + a\sqrt{a^2+x^2} = a^2+x^2$, siccome le condizioni
del problema richiedono.

Avverto

Avverto che l'iperbola LE taglia la parabola IALE anche nel punto L, in riguardo al quale $ID = x = 0$, $DE = y = \sqrt{a^2+x^2} = IL = a$. In tal incontro si verifica bensì l'equazione $ax + a\sqrt{a^2+x^2} = a^2+x^2$; ma assumendo $ID = x = 0$, il triangolo DIL si restrigne nella linea retta IL:

Dalla formola $ax + a\sqrt{a^2+x^2} = a^2+x^2$ si deduce quest'altra $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x = 0$, e dividendo per x; $x^3 - 2ax^2 + 2a^2x - 2a^3 = 0$. La divisione per x non dà la radice sopra notata $x = 0$. Si fa sparire il secondo termine ponendo $x = p + \frac{2}{3}a$, e ne risulta la formola $p^3 + \frac{2}{3}a^2p - \frac{34}{27}a^3 = 0$, la quale col metodo Cardanico si risolve nella seguente maniera

$$p = \sqrt[3]{\frac{17}{27}a^3 + \sqrt{\frac{(17)^2a^6}{(27)^2} + \frac{8a^6}{(27)^2}}} + \sqrt[3]{\frac{17}{27}a^3 - \sqrt{\frac{(17)^2}{(27)^2} + \frac{8a^6}{(27)^2}}}$$

$= \frac{a}{3}\left(\sqrt[3]{17+\sqrt{297}} + \sqrt[3]{17-\sqrt{297}}\right)$. Ora $\sqrt{297} = 17,233687$, e perciò

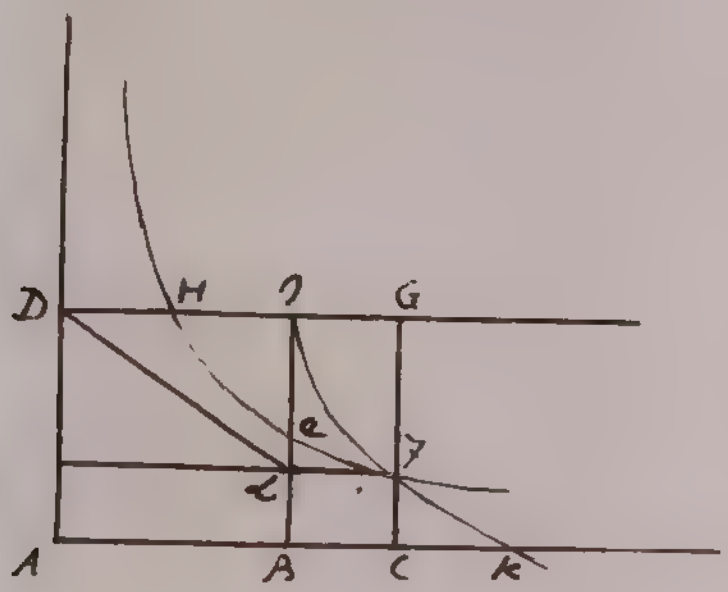
$p = \frac{a}{3}\left(\sqrt[3]{34,233687} - \sqrt[3]{0,233687}\right)$

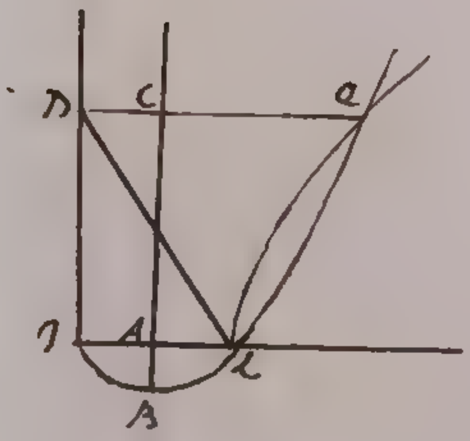
Scopriremo $\sqrt[3]{34,233687} = 3,247$, $\sqrt[3]{0,233687} = 0,616$; e ne dedurremo

$p = \frac{a}{3}(3,247 - 0,616) = \frac{a}{3} \cdot 2,631$.

Ma $x = p + \frac{2a}{3}$; dunque $x = \frac{a}{3} \cdot 4,631$

$= a \cdot 1,543\frac{2}{3} = \frac{3}{2}a + a\frac{43\frac{2}{3}}{1000}$.


D
H
G
e
d
A
B
C
K


D
C
e
A
B

Problema.

Dato l'angolo acuto ABC, e la linea BC divisa per mezzo in D, da dove sia inalzata una perpendicolare DA, si ricerca di condurre dal punto C una linea CK di maniera che sia KF = KB.

Problema.

Dato l'angolo acuto ABC, e la linea BC divisa per metà in D, da dove sia innalzata una perpendicolare DA, si ricerca di condurre dal punto C una linea CE di maniera che sia $EF = EB$.

Tirata EH normale a BC, pongo $AB = a$, $AD = b$, $BD = DC = c$, $EB = EF = x$. Per la similitudine dei triangoli ABD, EBH abbiamo l'analogia $AB : BD :: EB : BH$

$$a : c :: x : \frac{cx}{a}$$

che mi dà $BH = \frac{cx}{a}$, onde resta $HD = c - \frac{cx}{a} = \frac{ca - cx}{a}$, e quindi $\overline{HD}^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - 2ax + x^2)$. Si scopre $HC = 2c - \frac{cx}{a} = \frac{2ca - cx}{a}$, ed $\overline{HC}^2 = \frac{c^2}{a^2}(4a^2 - 4ax + x^2)$. La similitudine degli stessi triangoli determina $EH = \frac{bx}{a}$, ed $\overline{EH}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$. E poiché $\overline{EC}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HC}^2$, troveremo $\overline{EC}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}(4a^2 - 4ax + x^2) = \frac{(b^2 + c^2)x^2 + 4a^2c^2 - 4ac^2x}{a^2}$ $= \frac{a^2x^2 + 4a^2c^2 - 4ac^2x}{a^2}$. In oltre la simiglianza dei triangoli ECH, FCD somministra l'analogia

$$\overline{EC}^2 : \overline{HC}^2$$

$$\frac{a^2x^2 + 4a^2c^2 - 4ac^2x}{a^2} : \frac{4a^2c^2 - 4ac^2x + c^2x^2}{a^2}$$

$$:: \overline{EF}^2 \quad \overline{HD}^2$$

$$x^2 : \frac{a^2c^2 - 2ac^2x + c^2x^2}{a^2}.$$

Siamo dunque pervenuti all'equazione $4a^2c^2x^2 - 4ac^2x^3 + c^2x^4$ $= 4a^4c^4 - 12a^3c^4x + (a^4c^2 + 12a^2c^4)\cdot x^2 + (-2a^3c^2 - 4ac^4)\cdot x^3$ $+ a^2c^2x^4$, che si riduce alla seguente, cancellando i termini comuni, e dividendo per ac^2

$$(2a^2 - 4c^2)\cdot x^3 + (12ac^2 - 3a^3)\cdot x^2 - 12a^2c^2x + 4a^3c^2 = 0 \quad (1)$$

Per ottenere la costruzione stabilisco $x^2 = ay$ (2) e trovo dividendo per a

$$(2a^2 - 4c^2)\cdot xy + (12ac^2 - 3a^3)\cdot y - 12ac^2x + 4a^2c^2 = 0,$$

e fatta la divisione per $2a^2 - 4c^2$

$$xy + \left(\frac{12ac^2 - 3a^3}{2a^2 - 4c^2}\right)\cdot y - \frac{12ac^2x}{2a^2 - 4c^2} + \frac{4a^2c^2}{2a^2 - 4c^2} = 0. \quad (3)$$

Pongo $x + \frac{12ac^2 - 3a^3}{2a^2 - 4c^2} = z$ (4) e perciò $x = z + \frac{3a^3 - 12ac^2}{2a^2 - 4c^2}$.

Fatta

Fatta la sostituzione trovo $zy - \frac{12ac^2}{2a^2-4c^2}$
$- \frac{12ac^2}{2a^2-4c^2}\cdot\left(\frac{3a^3-12ac^2}{2a^2-4c^2}\right) + \frac{4a^3c^2}{2a^2-4c^2} = 0$, e finalmente
$z\cdot\left(\frac{12ac^2}{2a^2-4c^2} - y\right) = \frac{12ac^2}{2a^2-4c^2}\cdot\left(\frac{12ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}\right) + \frac{4a^2c^2}{2a^2-4c^2} =$
$\frac{4ac^2}{2a^2-4c^2}\cdot\left(\frac{3\cdot 2a^2c^2-3a^3}{2a^2-4c^2}\right)$ (5.)

Comincio dal costruire quest'ultima formola, ch'è all'iperbola fra gli assintoti, e primieramente suppongo $a^2 > 2c^2$. Continuo AC verso I, e tagliata $AI = \frac{12ac^2}{2a^2-4c^2}$, pel punto I tiro K″IK′ parallela a BA. Se $\frac{12ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}$ è quantità positiva, il che addiviene, quando essendo $a^2 > 2c^2$, e $12ac^2 > 3a^3$, segno $IL = \frac{12ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}$ da I verso K″. Se fosse negativa, la dovrei segnare per direzione contraria. Dopo ciò fra gli assintoti MO, ME′; MO″, ME″ delineo i due rami di iperbola GPG′, G″P″, il rettangolo dalle cui coordinate si uguagli a $\frac{4ac^2}{2a^2-4c^2}\cdot\left(\frac{3\cdot 2ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}\right)$. Tagliata $LK = z = x + \frac{12ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}$, onde ne risulti $IK = x$, e menata KE parallela ad IB, sarà $AE = IK = x$, $EG = \frac{12ac^2}{2a^2-4c^2} - y$, $KG = y$.

Proseguirò col descrivere al diametro IB la parabola G′GIG″ corrispondente alla equazione (a) $ay = x^2$, in riguardo a cui $IK = AE = x$, $KG = y$.

Le due curve si intersecheranno nei tre punti G, G′, G″, pei quali menate prima le tre linee GE, G′E′, G″E″ parallele ad IB, e poscia le tre altre CFE, CE′F′, CF″E″, ci daranno queste una triplice soluzione del Problema, determinando EF = EA, E′F′ = E′A, E″F″ = E″A.

Tenuta ferma l'ipotesi di $a^2 > 2c^2$, può essere $12ac^2 - 3a^3 = 0$, e per conseguenza IL =

$\frac{12ac^2-3a^3}{2a^2-4c^2}=0$. In tal circostanza avremo $c=\frac{1}{2}a$, ed AAD sarà la metà di un triangolo equilatero, e la linea AI = 3a. La formola (5) prenderà l'aspetto $z\cdot(3a-y)=a^2$, e la costruzione varierà in questo solo, che la linea O''O coinciderà colla AI. Nella formola (1) svanirà il secondo termine, e resterà, dividendo per a^3, $x^3-3a^2x+a^3=0$. Una delle tre radici sarà una mista minore di $\frac{1}{3}a$, e mancando il secondo termine, la somma delle tre radici si eguaglierà a nulla.

Apparterrà alla stessa supposizione di $a^2>2c^2$ il caso di c finita, e di $a=\infty$; nel quale (fig. 2.) AB è parallela ad AD. Ritenute le sopra usate denominazioni, avremo

$\overline{EC}^2 : \overline{AC}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{AD}^2$

$4c^2+x^2 : 4c^2 :: x^2 : c^2$, e quindi

$4c^4+c^2x^2=4c^2x^2$, ovvero $4c^4=3c^2x^2$, ed estraendo la radice, $2c^2=c\sqrt{3}\cdot\pm x$, e passando all'analogia $c\sqrt{3} : c :: 2c : \pm x$.

Sulla base BC descriverò i due triangoli equilateri AMC, AM'C, e divisa per metà AM in P, AM' in P', condurrò le rette CFPE, CF'P'E', e dico essere EF = BE, E'F' = BE'. Si tirino FN, F'N' parallele a BC. I due triangoli EFN, EBP, ed altresì i due E'F'N', E'BP' sono rettangoli, ed hanno un angolo comune in E, E', e di più i lati uguali NF, BP; N'F', BP', e perciò EB = EF, E'B = E'F'; il che [illegible]

Egli è agevole l'osservare, che questa soluzione sintetica deriva dall'analisi; imperciocchè $CP=c\sqrt{3} : BP=c :: CB=2c : BE=\frac{2c^2}{c\sqrt{3}}$.

$CP=c\sqrt{3} : CB=2c :: NF=c : EF=\frac{2c^2}{c\sqrt{3}}$

e per conseguenza BE = EF.

Mi inoltro a supporre $a^2 = 2c^2$, ossia $a = c\sqrt{2}$, il che determina semiretto (Fig. 3.) l'angolo AAC. Surrogato nella formola (1.) in cambio di $2c^2$ il suo valore a^2, e fatta la divisione per a^3, si riduce così $3x^2 - 6ax + 2a^2 = 0$, ovvero $x^2 - 2ax + \frac{2}{3}a^2 = 0$, e da questa raccogliasi $x^2 - 2ax + a^2 = \frac{1}{3}a^2$, e quindi $a - x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, e finalmente $a \mp \frac{a}{\sqrt{3}} = x$.

Si continui $CA = a$ in G finchè sia $AG = \frac{CA}{3} = \frac{a}{3}$, e divisa la linea CG per metà in L, fatto centro in L, col raggio $LC = \frac{2}{3}a$ descrivasi il circolo CEGE'C, che taglierà $AE = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Prolungata EA sino in E', ed essendo retto l'angolo EAC, avremo $AE' = AE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, e perciò $EE' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Si continui quanto fa di uopo DA verso F', dico che menate le linee CFE, CE'F', sarà $EF = EA$, $E'F' = E'A$. Delineo EI parallela a AC, e conduco AF', e AI che passerà pel punto F.

Per gli angoli retti in A sarà $\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{EC}^2$: ma $\overline{AC}^2 = a^2$, $\overline{AE}^2 = \frac{1}{3}a^2$; dunque $\overline{EC}^2 = \frac{4}{3}a^2$, e quindi $EC = E'C = \frac{2a}{\sqrt{3}} = EE'$. E' dunque equilatero il triangolo ECE', il quale dalla linea CA viene diviso in due parti eguali CAE, CAE'. Ora l'angolo ACE si agguaglia ad $\frac{1}{3}$ di retto; dunque l'angolo AEC pareggia $\frac{2}{3}$ di retto, e detratto il semiretto AEI, resta l'angolo IEC uguale ad $\frac{1}{6}$ di retto, al quale si agguagliano EIB, ECB, IAC. E poichè l'angolo AAC è semiretto, si raccoglie essere EAF pari ad $\frac{1}{3}$ di retto. Questa stessa misura compete anche all'angolo EFA. E vaglia il vero ciascuno dei quattro angoli EFK, IFK, BFD, CFD è uguale a $\frac{5}{6}$ di retto, e per conseguenza EFB uguale

ad

ad $\frac{1}{3}$ di retto; dunque EA = EF; il che &c.

Essendosi provato l'angolo ECB uguale ad $\frac{1}{6}$ di retto, e l'angolo ECF' del triangolo equilatero ECE' pareggiando $\frac{2}{3}$ di retto, sarà l'angolo DCF' uguale a $\frac{5}{6}$ di retto, e per conseguenza l'angolo CF'D uguale ad $\frac{1}{6}$ di retto; e l'angolo doppio CF'A uguale ad $\frac{1}{3}$ di retto; ma tale altresì è l'angolo F'BE = F'CG; dunque il triangolo F'E'A è isoscele; e perciò F'E' = E'A; il che &c.

Resta da considerare la circostanza di $2c^2 > a^2$. Cangio i segni nella formola (1.), e mi si presenta $(4c^2-2a^2).x^3(-12ac^2+3a^3).x^2 + 12a^2c^2x - 4a^3c^2 = 0$. (6) Faccio come sopra $x^2 = ay$; e scopro dividendo prima per a, e poscia per $4c^2-2a^2$, $xy\frac{(-12ac^2+3a^3).y + 12ac^2x - 4a^2c^2}{4c^2-2a^2} = 0$. Pongo $x - \frac{12ac^2+3a^3}{4c^2-2a^2} = -z$, e quindi $x = -z + \frac{12ac^2-3a^3}{4c^2-2a^2}$. Adempiuta la sostituzione si trova $-zy - z\cdot\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2} + \left(\frac{12ac^2-3a^3}{4c^2-2a^2}\right).\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2} - \frac{4a^2c^2}{4c^2-2a^2} = 0$; e per ultimo $z\cdot\left(y+\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2}\right) =$
$\left(\frac{12ac^2-3a^3}{4c^2-2a^2}\right).\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2} - \frac{4a^2c^2}{4c^2-2a^2} = \frac{4ac^2}{4c^2-2a^2}\cdot\left(\frac{32ac^2-7a^3}{4c^2-2a^2}\right)$

Prolungo la retta AA finchè sia AM = $\frac{12ac^2+3a^3}{4c^2-2a^2}$, e pel punto M da linea LMO parallela a AD. Poichè $\frac{12ac^2-3a^3}{4c^2-2a^2} = x+z$, segnata AE = x, resterà ME = z. Nella AD continuata taglio AI = $\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2}$; e per I meno OIL parallela a AM, e fra gli assintoti LO, LIO' descrivo l'iperbola PGG'G'', le cui coordinate LK = z; KG = KE + EG = $\frac{12ac^2}{4c^2-2a^2}$ + y. Disegno dopo ciò al diametro DA, col parametro AB = a

la

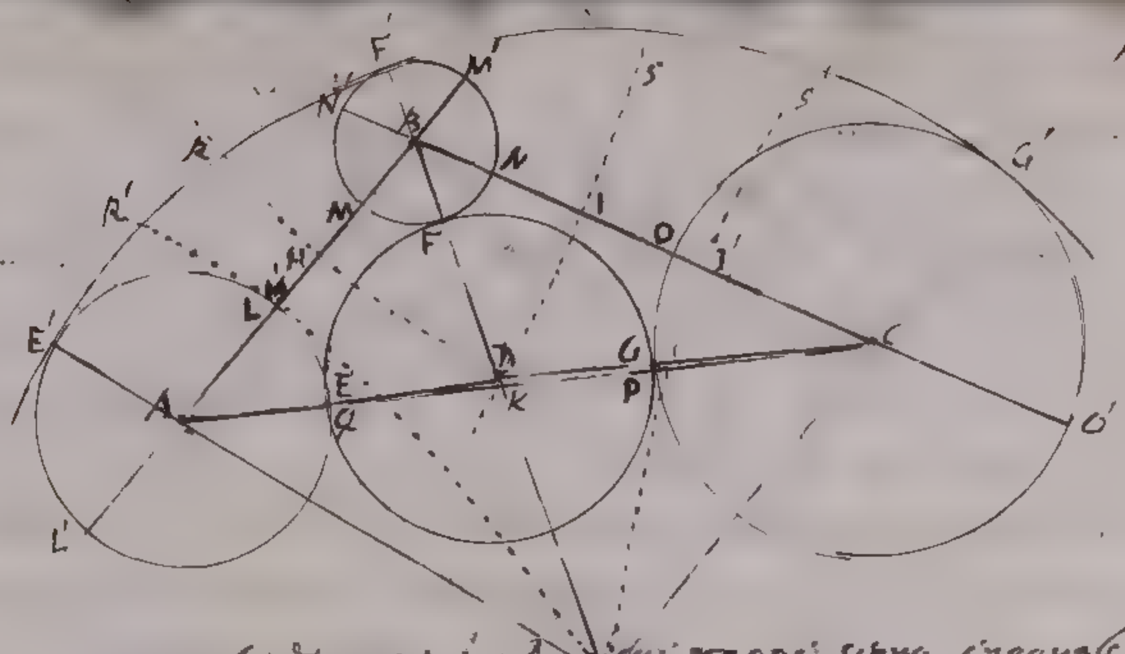
la parabola $A G G' G''$, che avrà per coordinate $AE = x$, $EG = y$; e taglierà l'iperbola in tre punti G, G', G'', pe' quali condotte le $GE, G'E', G''E''$ parallele a AI, determineranno le tre radici AE, AE', AE'', che somministrano la soluzione del Problema. Ed infatti descritte le linee CFE; $CE'F'$, $F''CE''$, si troverà dovere $EA = EF$, $E'A = E'F'$, $E''A = E''F''$.

Vediamo cosa succede quando $AB = a$ si eguaglia a $AD = c$. In tal ipotesi la formola (6) si trasforma così: $2ax^3 - 9a^2x^2 + 12a^3x - 4a^4 = 0$, e dividendo per a, $2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x - 4a^3 = 0$. Ricava questa la divisione per $x - \frac{1}{2}a$, e ne risulta il quoziente $2x^2 - 8ax + 8a^2 = 0$, e per conseguenza $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$, che mi dà $2a - x = 0$, e quindi $x = 2a$. Le radici dunque della nostra equazione sono $x = \frac{1}{2}a$, $x = 2a$, $x = 2a$.

I punti A, F (fig. 5.) si congiungono col punto D, e tagliata $AE = x = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}c$, si determina giustamente $FE = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}c$. Inoltre i punti E', E'' coincidono col punto C. Fatto centro in C col raggio $CA = 2a = 2c$ si descriva la porzione di circolo $F'AF''$, e condotte le rette $E'F'$, $E''F''$, ne proverrà, come richiede il Problema, $E'A = E'F'$, $E''A = E''F''$.

Si raccoglie, che così vada operato, dal supporre AD (fig. 6.) minima rispettivamente a AB. In questa circostanza si trova $E'A = E'F'$, adeguatamente uguale ad a CF', AF', AC, e quindi l'angolo $F'CB$ è infinitamente prossimo a quello del triangolo equilatero, e tal angolo appunto, ma esatto, si deve usare, quando $a = c$. Lo stesso dicasi dell'angolo BCF''.

Dati tre circoli di posizione, i cui raggi siano ineguali determinare un circolo, che li tocchi tutti tre.



Dati tre circoli di posizione, i cui raggi siano ineguali determinare un circolo, che li tocchi tutti e tre.

Siano dati di posizione i tre circoli espressi nella figura, i cui centri A, B, C: si congiungano colle rette AB, AC, BC. Se D sia il centro del circolo EFG, che tocca i tre circoli dati; egli è manifesto, che condotte le linee DA, DB, DC, passeranno pei punti dei contatti E, F, G. Divisa per metà la retta LM nel punto H; AH differisce da BH per quella grandezza, per cui AL supera BM. Coi fochi A, B, e col vertice in H si deline[ì] l'iperbola conica RHD, la qual è fornita della proprietà, che condotte a qualunque suo punto D le rette AD, BD, differiscono per la grandezza AL – BM. Non altrimenti si partisca egualmente in I la linea NO, e coi fochi B, C, e col vertice in I si descriva l'iperbola SID; ed accaderà, che menate a qualsivoglia suo punto D le linee BD, CD, la loro differenza si agguagli sempre a CO – BN. Le nostre due iperbole si taglieranno nel punto D centro del circolo EFG, che tocca i tre circoli dati nei punti E, F, G.

Ciò egli è vero consistendo nella ineguaglianza dei raggi AE, BF, CG la differenza delle linee AD, BD; BD, CD; ne segue che debba essere DE = DF, DF = DG, e che per conseguenza il circolo descritto col raggio DF passi pei punti E, F, G, e che i circoli dati li tocchi nei detti punti, essendo rette le linee DEA, DFB, DGC condotte dal centro D ai tre centri dei circoli dati [illegible].

Con simile artificio si determinerà il centro D' del circolo EFG

che

che tocca i circoli dati nei punti: E', F', G'. Si tagli AH' = AH, e la linea AH' verrà superata dalla BH' per quella stessa quantità, per cui il raggio AL ecceda il BM. Aggiungendo dunque ad AH' il raggio AL', e a BH' il raggio BM', riusciranno eguali le linee L'H', M'H', dimodochè la linea L'M' si sarà divisa per metà nel punto H' in quella guisa che nella prima soluzione si è divisa in due parti eguali la retta LM in H. ~~nella prima soluzione~~. Coi fuochi A, B, e col vertice in H' descrivasi l'iperbola R'H'D', secondo ramo dell'iperbola RHD la qual iperbola R'H'D' è dotata della proprietà che condotte a qualsivoglia punto D' le linee AD', BD', la prima cala dalla seconda per la grandezza con cui il raggio AE' supera l'AF'. Quindi aggiunto a D'A il raggio AE', e a D'B il raggio BF', le linee D'E', D'F' saranno eguali, ed il circolo descritto coi detti raggi toccherà i circoli L'E'L, ~~nei punti~~ MF'M' nei punti E', F', passando i raggi D'E', D'F' pei centri A, B dei predetti circoli.

Dopo ciò si delinei il secondo ramo S'I'D' dell'iperbola SID, il quale attraverserà in un punto D' l'iperbola R'H'D'. Condotte le rette D'CG', D'AF', passerà fra loro eguaglianza: ma D'AF' = D'AE'; dunque le dette tre linee sono eguali, ed il circolo, a cui servono di raggio, passa pei punti E', F', G', e facendo transitare i raggi D'E', D'F', D'G' pei centri dei tre circoli dati, il circolo E, F' G' toccherà i circoli dati nei punti E', F', G'; sicchè &c.

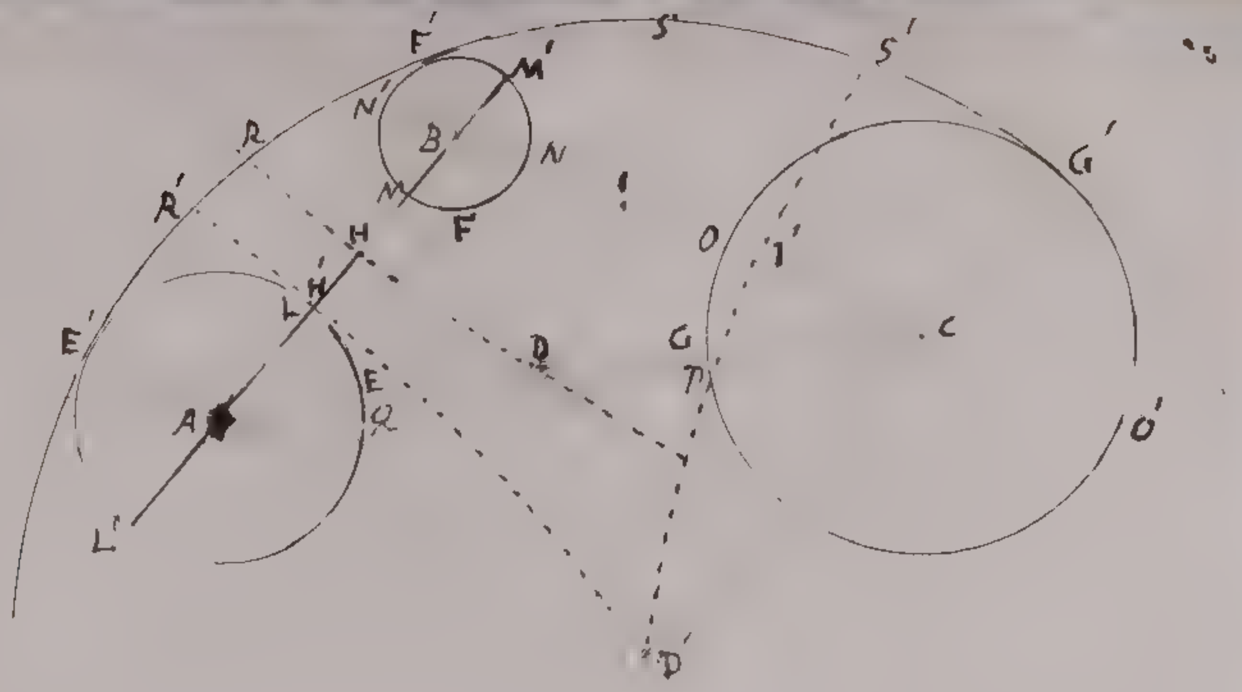
Ed ecco la compiuta soluzione sintetica del Problema proposto.

Corollario I.

Se i raggi dei tre circoli dati fossero eguali, si congiungerebbero in un solo i due punti H, H'; I, I'; D, D', e le iperbole diverrebbero linee rette normali ad AB, AC.

Corollario II.

Posti soltanto eguali i due raggi AL, BM, la linea retta normale ad AB verrebbe tagliata dai due rami di iperbola SID, S'I'S' nei due punti D, D', che sarebbero i centri dei due circoli EFG, E'F'G', che toccano i circoli dati



F'
S'
S'
M'
N'
B
N
M
F
R
R'
H
H
L
E'
E
Q
A
L'
D
D'
G'
O
I'
G
T
C
O'

Problema

In un dato cerchio iscrivere un triangolo, i cui lati prodotti passino per tre punti dati di sito, e posti in linea retta

Problema.

In un dato cerchio NG iscrivere un triangolo DEF, i di cui lati prolungati passino pe' tre punti A, B, C dati di sito, e posti in linea retta.

Analisi.

Si unisca ABC, alla quale supposto descritto il triangolo DEF si intenda condotta per E parallela EG, e congiunta GF, la medesima si distenda in H. E perchè l'angolo EGF si eguaglia all'angolo EDF, che all'altro FHB; saranno uguali i due angoli EDF, FHB, e quindi simili i due triangoli DAB, FHB; che hanno l'angolo DBA comune, ed il rettangolo ABH uguale al FBD. Si intenda pel punto dato B condotta al circolo NG la tangente BI, che sarà geometricamente nota; e poichè il quadrato di questa pareggia il rettangolo FBD = ABH, avremo AB : BI :: BI : BH, ed essendo conosciuti i tre primi termini dell'analogia, sarà conosciuto anche il terzo BH, e per conseguenza dato il punto H.

Tirata per G al medesimo circolo la tangente GK, che incontri AC in K, sarà dato ancora il punto K. Imperciocchè l'angolo HGK = GEF: ma questo a cagione delle parallele eguaglia il suo alterno FCH; dunque l'angolo HGK = FCH, ed essendo a cagione dell'angolo comune in H, simili i due triangoli HGK, HCF, sarà il rettangolo CHK uguale all'FHG; Dal punto dato H si conduca HN tangente al circolo NG, ed essendo il suo quadrato uguale al rettangolo FHG, sarà parimente esso quadrato uguale al rettangolo CHK, e stando in continua proporzione le tre rette CH, HN, HK, ed essendo date le due prime, sarà altresì data la terza HK,

170

e noto il punto K, come si dovea dimostrare.

Soluzione del Problema.

Dal punto dato B si meni al circolo NG la toccante ~~AG~~ AI, e si determini poscia BH terza proporzionale dopo AB, AI, onde si renda noto il punto H. Per questo si conduca HN tangente del circolo NG; ed alle due CH, HN si trovi HK terza proporzionale e finalmente per K si delinei KG toccante il circolo NG nel punto G, e descritte GE parallela a CA, AE, che si continui sino in D, DA; che tagli il circolo nel punto F, e finalmente EF che prorogata passerà pel punto C, e resterà determinato il triangolo cercato DEF. Egli è evidente che la linea EF continuata passa pel punto C, essendosi con tale supposizione determinato il punto ~~K~~, K; dal quale dipende la soluzione del Problema.

Soluzione

del Sig. D. Annibale Giordano di Ottajano.

Si unisca AAC, alla quale s'intenda condotta per E parallela EG, e congiunta GF, la medesima si distenda in H. E perchè l'angolo EGF adegua si l'angolo EDF, che l'altro FHA, saranno uguali i due angoli EDF, FHB, e quindi simili i due triangoli DAB, FHA, che hanno l'angolo DBA di comune, e 'l rettangolo AAH uguale al dato FAD, e con ciò dato il punto H

2. Si tiri per G al medesimo circolo la tangente GK, incontri AC in K.

Sarà dato ancora il punto K; imperocchè l'angolo HGK è uguale all'altro GEF; ma questo a cagione delle parallele EG, AC si adegua al suo alterno FCH, ed essendo quindi simili i due triangoli HGK, HFC, ne sarà il rettangolo CHK uguale al dato FHG, e conseguentemente essendo dato il punto K, si ridurrà il problema a condurre dal punto K la tangente KG al circolo NG. Come &c.

Problema Geometrico

Problema.

Dati tre punti A, D, B (Fig. 3) in una stessa linea descrivere quella curva a un punto Q della quale posto ad arbitrio condotte le tre linee AQ, DQ, BQ, la somma dei loro quadrati eguagli il quadrato dato (m^2).

Si descriva (fig.a 1.a) il circolo RDN, il cui diametro RN = 4, e segnata HN = 1 si avrà la ordinata HD = $\sqrt{3}$ la quale si congiunga perpendicolarmente. Si tagli HQ = m e condotta prima la diagonale DN si delinei QL ad essa parallela; e in analogia DH = $\sqrt{3}$: HN = 1 :: HQ = m : HL e in maggior ordine $HL = \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{m\sqrt{3}}{3}$.

Segue (fig.a 2.da) $GK = \frac{AB - DB}{3}$ della fig.a 3.a e trovata; e il quadrato $GH = \frac{DB}{3}$ della fig.a 3.a sarà il quadrato della diagonale HK cioè $\overline{HK}^2 = \overline{AB}^2 - 2AB\cdot DB + 2\overline{DB}^2$. Normale di HK conduce $KG = \frac{AB}{3}$ e ne risulta il quadrato della diagonale GH cioè $\overline{GH}^2 = \frac{2\overline{AB}^2 + 2\overline{DB}^2 - 2AB\cdot DB}{9}$

Nella fig.a 3.a si tagli $GB = \frac{AB + DB}{3}$, e per il punto G alla linea AB si conduca la perpendicolare $GH = \frac{\sqrt{2\overline{AB}^2 + 2\overline{BD}^2 - 2AB\cdot DB}}{3}$. Fatto centro in H col raggio $HL = \frac{m\sqrt{3}}{3}$ si descriva un circolo il quale tagli la linea AB continuata se fa d'uopo nei punti L e C. Col centro G raggio $GC = GL = \sqrt{3m^2 - 2\overline{AB}^2 - 2\overline{DB}^2 + 2AB\cdot BD}$ si delinei il circolo CQL; dico esser questo la curva cercata, e un qualunque punto Q della quale tirate dai punti dati A, D, B le linee AQ, DQ, BQ, si eguaglia la somma dei loro quadrati al quadrato noto (m^2).

essendo $FF = AB - FB$, $DF = DB - FB$, per la 4a del 2o libro di Euclide abbiamo

$$AC^2 = AB^2 - 2AB\cdot FB + FB^2 + FC^2$$

$$DC^2 = DB^2 - 2DB\cdot FB + FB^2 + FC^2 \quad \text{e conseguentemente}$$

$$BC^2 = FB^2 + FC^2$$

$$AC^2 + DC^2 + BC^2 = AB^2 + DB^2 - 2AB - 2DB\cdot FB + 3FB^2 + 3FC^2$$

Ma per la natura del circolo $FC^2 = GL^2 - GF^2$

ed $GF^2 = GB^2 - 2GB\cdot FB + FB^2$ dunque

$FC^2 = GL^2 - GB^2 + 2GB\cdot FB - FB^2$. ma per la costruzione

$GB = \frac{AB + DB}{3}$ dunque

$$FC^2 = GL^2 - \frac{AB^2 - 2AB\cdot DB - DB^2}{9} + \frac{2AB + 2DB}{3}\cdot FB - FB^2$$

Ma per la costruzione $GL^2 = \frac{3m^2 - 2AB^2 - 2DB^2 + 2AB\cdot BD}{9}$ dunque

$$FC^2 = \frac{3m^2 - 3AB^2 - 3DB^2}{9} + \frac{2AB + 2DB}{3}\cdot FB - FB^2 \quad \text{e perciò}$$

$$3FC^2 = m^2 - AB^2 - DB^2 + 2AB + 2DB\cdot FB - 3FB^2$$

Si sostituisca in cambio di $3FC^2$ il ritrovato valore nella formola (a) e si troverà

$$AC^2 + DC^2 + BC^2 = m^2 + AB^2 + DB^2 - 2AB - 2DB\cdot FB + 3FB^2 - AB^2 - DB^2 + 2AB + 2DB\cdot FB - 3FB^2$$

ossia $AC^2 + DC^2 + BC^2 = m^2$ il che &c.

$\overline{IK}^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{1}$ $\overline{IL}$ $\frac{b^2}{9}$

$\overline{HK}^2 = \frac{a^2-2ab+2b^2}{1}$ $\overline{KG}^2 = \frac{a^2}{9}$

$\overline{HG}^2 = \frac{2a^2-2ab+2b^2}{9}$

$RH = 3 \quad HN = 1$

$HD = \sqrt{3} \quad HO = m$

$HL = \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{m\sqrt{3}}{3}$

$\overline{HL}^2 = \frac{3m^2}{9}$

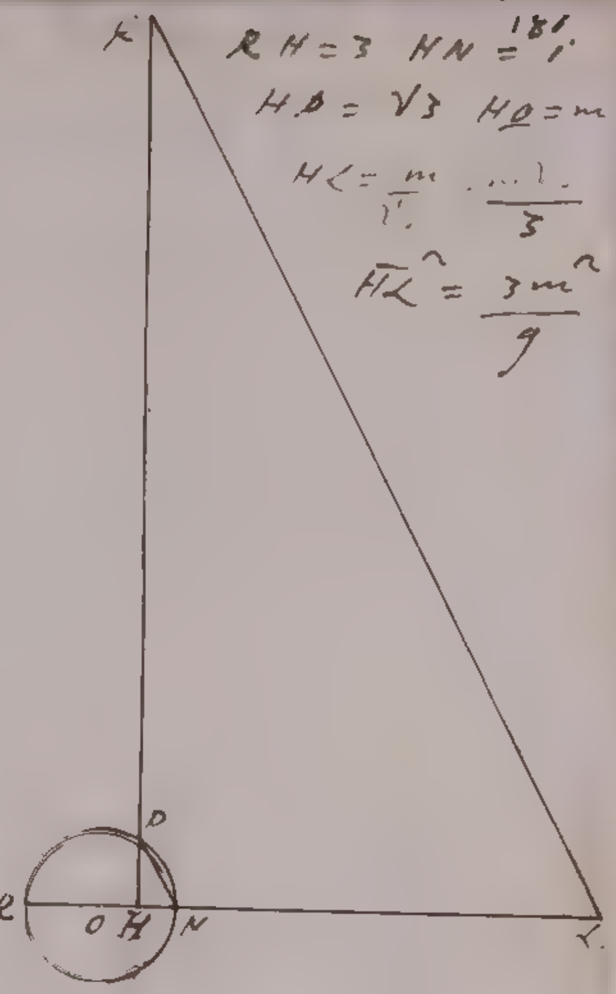


Fig.ª 1ª

Fig.ª 2ª

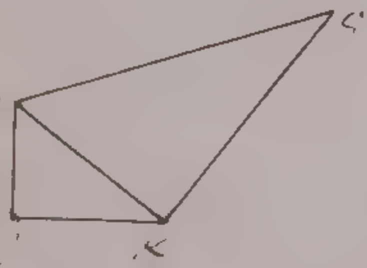
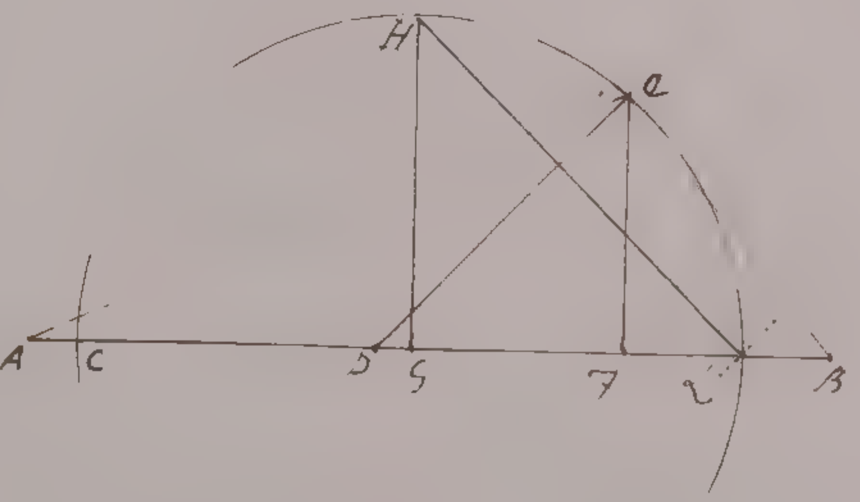


Fig.ª 3ª



$AB = a$

$DB = b$

$BG = \frac{a+b}{3}$

$GH = \frac{\sqrt{2a^2-2ab+2b^2}}{3}$

$HL = \frac{m\sqrt{3}}{3}$ $GL = \frac{\sqrt{3m^2-2a^2-2b^2+2ab}}{3}$ raggio del circolo

Soluzione Geometrica

del Problema proposto dalla Signora Contessa Clelia Grillo Borromeo

al P. Crivelli C. R. S.

Soluzione geometrica del Problema proposto dalla Sig.ra C. D. Clelia Grillo Borromea al P. Crivelli C.R.S.

Problema

A. D.

A proporzione di un dato capitale, per cui si debba il censo annuo in ragione ignota di un tanto per cento, si corrisponda annualmente una data corrisponsione, col mezzo della quale e si paghino i censi correnti e si estingua il capitale nel tempo espresso per $(n+p)$, significando la lettera (n) un numero noto di anni interi, e la p una qualunque parte d'anno: si dimanda il annuo censo pattuito in ragione di un tanto per cento.

Il capitale da principio consegnato si chiami $= a$, sia il frutto pattuito $= x$, la quantità, che in capo di ogni anno si sborsa si ponga $= b$: dunque compito il primo anno, il capitale rendendo pagato il censo viene espresso dal trinomio $a + x - b$. Pongo questo trinomio $= y$: il frutto corrispondente al capitale diminuito sarà $= \frac{xy}{a}$, e conseguentemente il capitale del terzo anno coll'aggiunta del frutto e col diffalcamento della corrisponsione sarà $= y + \frac{xy}{a} - b$, il quale trinomio viene da me posto uguale all'incognita (z). Il frutto che corrisponde alla grandezza z sarà $= \frac{xz}{a}$ che aggiunto al capitale (z) con la detrazione dell'annuo sborso (b) ci dà il capitale per l'anno susseguente $= z + \frac{zx}{a} - b = u$. Ora supponiamo di essere giunti o all'ultimo anno intero, o all'ultima parte di anno, espresso l'uno, o l'altra per la quantità (p) che può far figura ugualmente o di numero rotto, o di unità. In questo ultimo tempo il capitale (u) più il frutto $\frac{pxu}{a}$ meno la corrisponsione

Soluzione geometrica del Problema proposto da Sig. Conte Borromeo al P. Crivelli

Il capitale da principio consegnato si faccia uguale ad (a) sia il frutto pattuito = x. La quantità che in capo di ogni anno si sborsa si ponga = (b). Dunque compito il primo anno il capitale con suo frutto pagato il censo si viene espresso dal trinomio $a + x - b$. Pongo questo trinomio = y il frutto corrispondente al capitale diminuito sarà = $\frac{xy}{a}$ e conseguentemente il capitale del terzo anno coll'aggiunta del frutto e col detraimento della corrisponsione sarà = $y + \frac{xy}{a} - b$, il quale trinomio vien da me posto uguale all'incognita (z). Il frutto, che risponde alla grandezza (z) sarà = $\frac{xz}{a}$ che aggiunto al capitale (z) con la detrazione dell'annua corrisponsione (b) ci da il capitale per l'anno susseguente = $z + \frac{zx}{a} - b = u$. e così si proceda di mano sino a compire il numero (n) finito degli anni, ne quali il capitale generalmente dabbe totalmente estinguersi.

Ora supponiamo di essere giunti o all'ultimo anno ovvero all'ultima parte di anno espresso d'uno e dato generalmente per la quantità (t) che può far figura egualmente o diminuito sotto d'unità

190

Per esempio nell' ultimo anno avremo il capitale espresso per la quantità $u + \frac{xu}{a} - b$, il quale deve essere per le condizioni del problema $= 0$, e conseguentemente $u + \frac{xu}{a} = b$, la quale (ov)vero come chiaramente si scopre è una iperbola apolloniana fra gli asintoti, che si costruisce nella seguente maniera.

Nel asintoto AD si ponga AB = a e tirate le due perpendicolari AH, BC facciasi BC = b, e tra gli asintoti HA, AD descrivasi l'iperbola che passi per il punto C; egli è manifesto che tutte le ordinate iperboliche che principiano dal punto B, e vanno verso D saranno la incognita (x), e le ordinate corrispondenti l'altra incognita (u).

2. Ora se per $z + \frac{zx}{a} - b = u$, dunque $az + zx = ab$ convertirassi la equazione in un analogismo $a + x : b + u :: a : z$. Supposta la parallela all' asintoto, la di cui distanza normale FL sia uguale a b), se noi faremo come

In questo ultimo tempo il capitale (u) meno il frutto $\frac{pxu}{a}$ meno la corrisposizione (b). Avrà questa ultima quantità proporzionali alla lunghezza qualunque più del tempo, e [illegible] le condizioni del problema devono essere uguali a nulla, cioè a dire $u + \frac{pxu}{a} - pb = 0$ e conseguentemente $au + pxu = apb$, rispondenti [illegible]. La qual [illegible] in questo [illegible] equazione [illegible] la formula locale si può ridurre in due maniere diverse che si danno due differenti costruzioni

DL : LG :: ~~...~~ : LM

per il punto M, ed altri infiniti in simil maniera determinati passerà una nuova curva, di cui mi faccio ad investigare la natura;

Primieramente posto $x = a$, e riferita la curva all'asse DL, passerà ella per il punto K, ed avremo un ramo simile alla presente quistione, il quale alzandosi al di sopra del ramo LC dell'iperbola avrà per assintoto la linea DH. L'altro ramo, di cui abbiamo e la linea DL, camminerà al di sotto dell'iperbola. Tagliando GL per metà in M sarà l'absissa $KL = a$

Descritta questa 2.a curva passiamo alla 3.a, che nasce dall'equazione $y + \frac{xy}{pa} - b = z$

dalla quale si cava l'analogia come sopra $a + x : b - z :: a : y$

Posta dunque la NE parallela ad DL con la distanza perpendicolare $LE = b$

se noi faremo come NE : EM :: NO : EQ

avremo il punto Q, ed altri infiniti alla curva cercata. Questa riferita all'asse NE passerà per il punto C notando in esso l'altre due curve e misurando

DK . LM

e quella che sono come più a prima si è, altrimenti:

$a + px\,xu = axpb$.

Nella seconda si ottiene dividendo tutte i membri dell'equazione (p) onde si abbia

$\frac{au}{p} + xu = ab$

o sia

$\frac{a+x}{p} xu = ab$

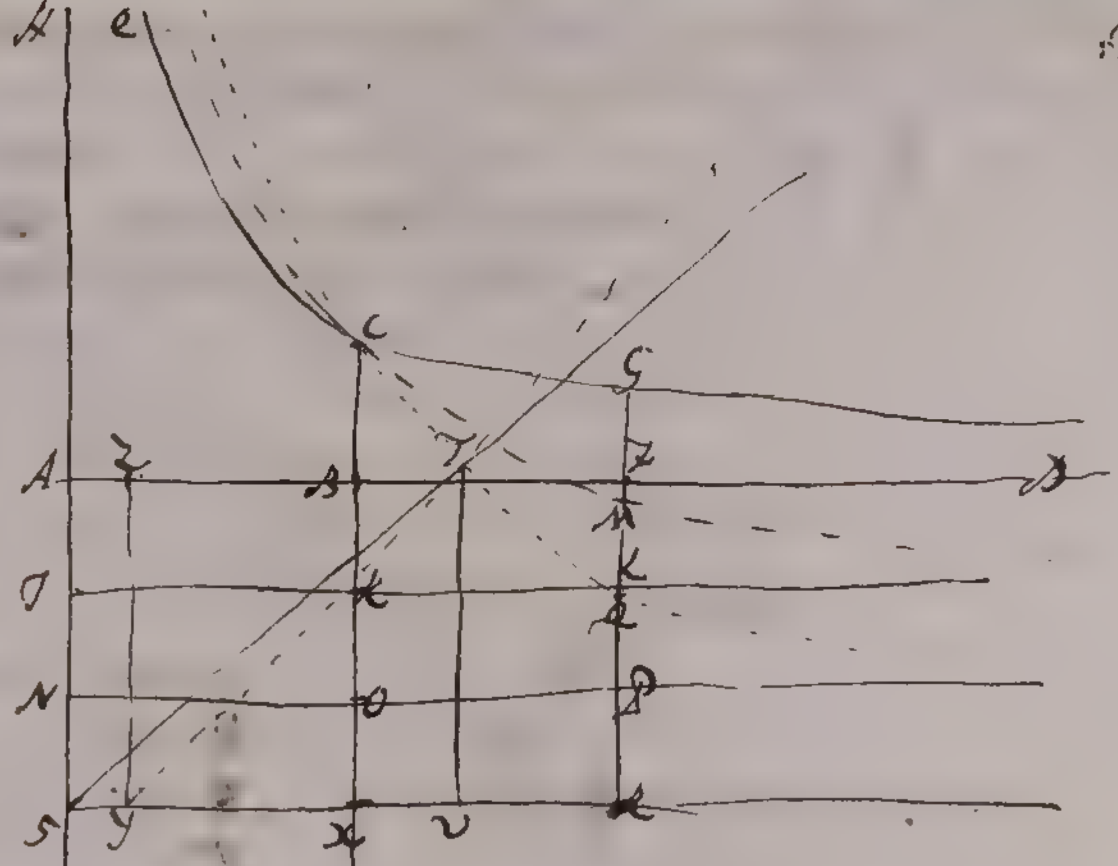
Sign

il ramo superiore, l'inferiore ammenorà
ma la 2.da curva, e l'assintoto OR taglia
l'ordinata MR nel punto L in parti
uguali quando OR sia $= 2$. Ed a
questa riflessione a qualunque caso dico
che si ... ponesse $x = na$ averemo
sempre i termini x :: $b+a$. $1z$ :: $b+z$
E le quali osservazioni serve a
Descrivere le curve tutte che servono
con somma semplicità ...

Supponiamo di esser pervenuti al termine
che sia l'ultima equazione $a+x-b=y$
ovvero $a+x=b+y$

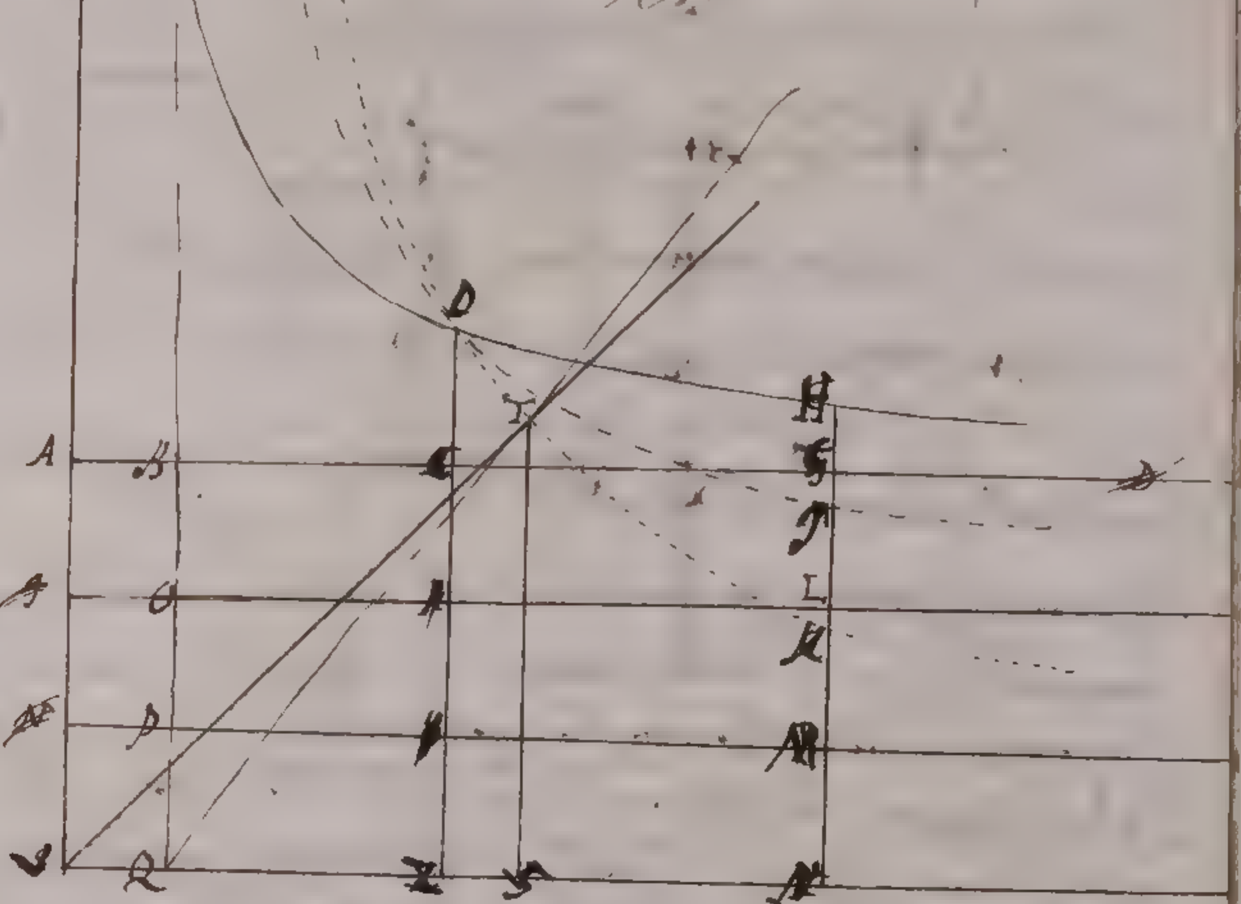
Prolungata la linea CO in X col porre
al solito $OX=b$, e condotto l'asse
SXR all'origine S si inclini la
retta ST ad angolo semiretto, la quale
tagli la nostra ultima curva nel punto
T, da cui lasciata cadere la normale
TV, averemo l'intercetta XV uguale
al valore del censo cercato x.

Nel caso poi, che il capitale assieme coi consti frutti
si estinguesse nel numero (n) degli anni
coll'aggiunta d'una data parte dell'anno
espressa per (p) sarebbe di uopo alterare la
costruzione nella seguente maniera.



La prima equazione corrispondente all' iperbola sarebbe $u + \frac{pux}{a} = pb$ segnando $\frac{pux}{a}$ il corso parziale, e pb quella parte di corrispensione, che rende dovuta a proporzione del termo espresso per (p). Dunque $a + px \times u = a \times pb$. Così AB retta $= a$ BC diventa uguale a (pb); l'abscissa qualunque $BZ = x$, e l'ordinata ZG rimane $= u$. Prima di passar oltre si determini la retta $ZB = pa$ e prese per mano la seconda equazione ridotta in analogia $a + x : a :: b + u : z$, questa non deve aver in conto alcuno alterata se non in quanto per adattarvi alla costruzione fa di mestieri moltiplicare i due primi termini colla quantità (p) e fare $pa + px : pa :: b + u : z$ uale a dire come $ZZ : ZB :: LG : LM$, essendo come si può facilmente vedere LZ, o sia AI, e così l'inferiore IN $N5 = b$: un simile artefizio si adoperi in tutte le altre equazioni locali appartenenti alla descrizione delle curve in serie. Ponendosi all'ultima equazione $a + x = b + y$ si moltiplichino ambi i membri per (p) e si faccia ~~$1 : p :: b + y : pa + px$~~ $p : 1 :: pa + px : b + y$

Indi dal origine Y fatta $XY = ZB = pa$ si tiri la inclinata YT con l'angolo TYV corrispondente alla proporzione di $p : i$, e dal punto T, nel quale la YT taglia la ultima curva, lasciata cadere la normale TV si avrà la intercetta $XV = p \times i$ lo che (C).



Problema

A difalco di un dato capitale, per cui si debba il censo annuo in ragione ignota di un tanto per cento, si contrapponga annualmente una data corrisponsione, col mezzo della quale e si paghino i censi e si estingua il capitale in un dato numero di anni: si dimanda il censo pattuito in ragione di un tanto per cento.

Costruzione geometrica del problema proposto.

Espongasi per la linea AB il capitale del principio convenuto, e per la linea BC ad essa perpendicolare di annua corrisponsione, che dee pagare il debitore ad estinzione del capitale, e de' censi. Tra gli assintoti AH, AD si descriva la Iperbola apolloniana ECG, la quale passi pel dato punto C. Quindi prolongato l'assintoto HA in S si prendano le intervalle AI, IN, NS ec. ciascuna delle quali siano uguali alla quantità BC, ed assieme colla stessa BC siano in numero, quanti sono gli anni, ne' quali si vuole che resti il capitale estinto. Dopo ciò si conducano le rette IL, NP, SR parallele all'assintoto AD.

Prendasi dal punto B verso D la abscissa BT ad arbitrio, la quale sia in qualunque proporzione ad AB, ed esprimasi generalmente per $n \times AB$. Facciasi come $1+n : 1 :: LG : LM$, e per il punto M, ed altri infiniti in simil maniera determinati passi la curva segnata a puntole linee, cioè a dire CM, che taglierà l'Iperbola nel punto C.

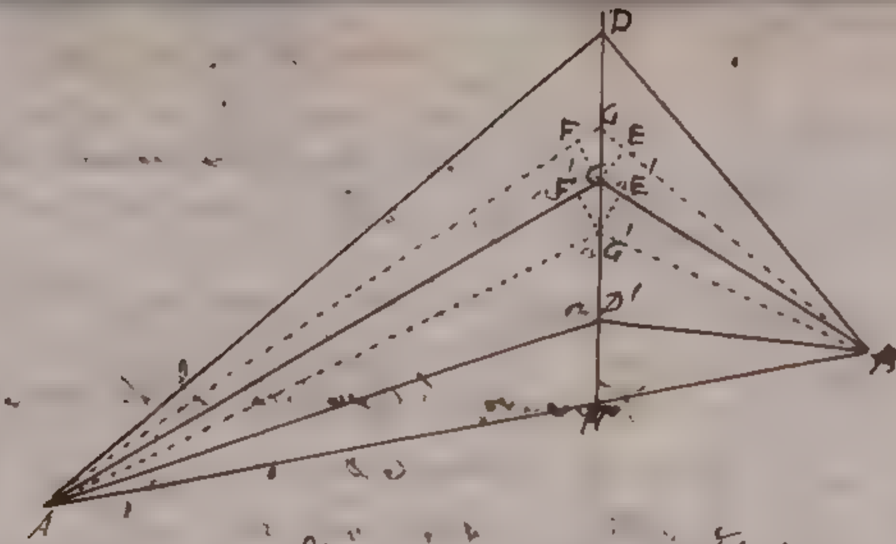
In oltre facciasi come $1+n : 1 :: PM : PQ$ e per il punto Q e per gli altri innumerabili in simil guisa trovati si descriva la terza curva delineata a punti CQ, che passerà anch'essa per il punto C.

Collo stesso metodo si proseguisca quanto porta il caso particolare, di cui vogliasi la soluzione: e quando saremo giunti alla linea retta NP penultima delle parallele descritte colla regola superiormente insegnata, non si proceda più oltre alla descrizione delle curve, ma dall'origine S si tiri la retta ST inclinata all'asse SK ad angolo semiretto, e nel punto l'ultima delle curve descritte nel punto T, da cui lasciamo cadere sopra il predetto asse SK la perpendicolare TV, si determinerà essa l'intercetta XV, la quale è il preciso valore del censo ~~cercato~~ ~~corrispondente~~ ~~condizionato dal problema~~ tutto relativo al capitale AB giusta le condizioni del problema.

Quando poi si volesse che il capitale insieme coi censi dipendenti venisse estinto non già in un dato numero di anni interi, ma bensì con l'aggiunta di qualche parte dell'ultimo anno espressa per una frazione, come per ragione di esempio in anni quattro e due quinti, anche a questo caso tolto generalmente, possa la soluzione o razionale o sorda, con una piccola alterazione della nostra costruzione agevolmente si adatterebbe.

Soluzione

di due Problemi Geometrici.



L'angolo ACB sia di gradi 120, e venga diviso per mezzo dalla retta DCH, dimodochè anche gli angoli ACD, BCD siano di gradi 120. Si io taglio la linea HD' > HC, hanno dimostrato il Ab. Frisi, ed il Co. Riccati essere minima la somma AC + BC + DC. Ma se prendi HnD' < HC, la somma AC + BC + nDC non è più minima; e quindi sembra non essere generale la soluzione dell'Ab. Frisi, non meno che quella del Co. Riccati contenuta nel Tom. 2. lib. 2. cap. 5. § 40. delle sue Istituzioni, che il Sig. Ab. Rassetti afferma ritrovarsi nelle Geometriche Esercitazioni di Bonaventura Cavalieri. Io sono persuaso, che non ricordavasi di ciò il Ab. Riccati si ha ritrovato col Cavalieri, non essendo egli capace di attribuirsi le cose altrui. Ma lasciando questo da parte, sembrami che la predetta soluzione si possa dimostrare generale, col mezzo di una semplicissima riflessione. Quando HD > HC, la linea DC dee prendersi come positiva, ed in tal caso la somma AC + BC + DC sarà minima. Che se HnD' < HC, la linea nD'C ha da prendersi come negativa, e parerà distanza minima la somma AC + BC − nD'C o sia CnG minima, e coi centri A, B descritti gli archi G'nD', nG'nG; ha il Co. Vincenzo Tom. 4 lib. 2 cap. 5 § 33 essere dimostrato la somma CnD' + CnE = nCnG'. Ora se è minima la somma AC + BC − nD'C, dovrà provarsi per la legge dei massimi e dei minimi AC + BC − nD'C = AnG + BnG' − nD'nG';

ma AC = AnG' + nD'C, BC = BnG + nGC, nD'C = nD'nG + nG'C.

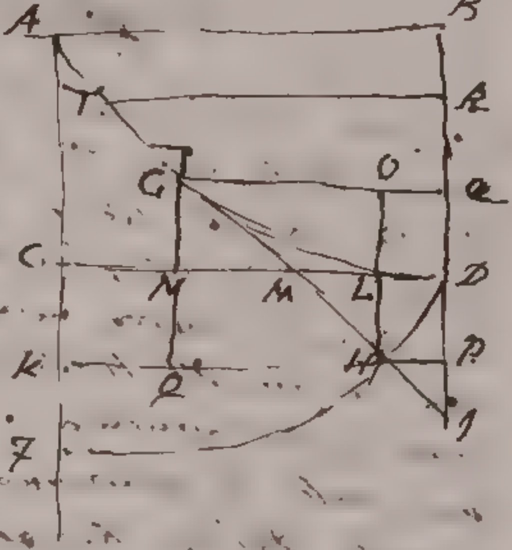
Dunque AnG' + nD'C + BnG + nGC − nD'nG − nG'C = AnG' + BnG' − nD'nG'

e quindi nD'C + nGC − nG'C = 0, o sia nD'C + nGC = nG'C come ho.

Giacchè $-\frac{dy}{y} = dv$, e nel punto A (fig. 2.) $y = 0$, avremo $-\frac{dy}{0} = dv$, e perciò $0 : -dy :: 1 : dv$: ma $-dy$ è infinito rispettivamente a 0; dunque anche dv rispettivamente all'unità; e quindi $dv = \infty$. e perchè $dv = 2dq$, sarà $2dq$, e molto più $z = \infty$

la cui ineguale grossezza non viene regolata in una legge costante, le quali

Trovare l'Evoluta della Cicloide.



$AG = 2v$, $AB = 2b$, $GH = GD = s$

$DI = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$, $AG = 4v - s$

$IQ : GG : QG$

$x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} : \sqrt{2vx-x^2} + \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$

$:: ID \quad . DM$

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$:

$x : NM :: ID : DM$

$x : ID :: NM : DM$

$x : IQ :: NM : y$, $NM = \frac{xy}{x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}} = \frac{y\sqrt{2vx-x^2}}{\sqrt{2vx-x^2} + \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}}$

$ds : dx :: s : HO = \frac{s\,dx}{ds} = \frac{2dx\sqrt{2vx}}{\sqrt{2x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}} = 2x$, e perciò

$KH = x$. $IQ : QG :: ID : DH$

$x + x \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}\sqrt{2vx-x^2}} : y :: \frac{x}{\sqrt{2vx-x^2}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$ ... $DH = DL$

$x + z : -x + z :: y : DH$

$x + z : x + z + x - z = 2x :: y : y - DH = QH = \frac{2xy}{x+z}$

$DL = \frac{xy}{\sqrt{2vx-x^2}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} = xy = \frac{y}{\sqrt{2vx-x^2}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - y =$

$\frac{x}{\sqrt{2vx-x^2}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} + x$ ... $\frac{1}{\sqrt{2vx-x^2}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} + 1$

$DR = z$, $RT = \sqrt{2vz - z^2} + \int \frac{v\,dz}{\sqrt{2vz-z^2}}$ Sia $z = 2v - x$, $2v - z = x$

$dz = -dx$, e sarà $RT = \sqrt{2vx - x^2} + \int \frac{-v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} = $ (fig. 1) $QD + BH$

$= QD + 2b - BD$

$ds : dx :: s : HO = \frac{s\,dx}{ds} =$

$2\sqrt{2vx} \cdot dx = 2x$, e perciò

$\sqrt{2v} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

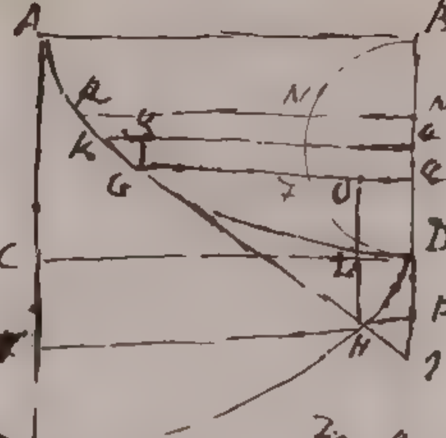


Fig. a.

$LH = x$.

$dx : dy :: 1 : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - x$

: PH, e sostituendo in cambio di dy il suo valore,

$dx : \frac{\sqrt{2vx-x^2} \cdot dx}{\sqrt{x}} :: \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}} \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - x$

: $PH = DL = \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - \sqrt{2vx-x^2}$: ma $RD = 2b$; dunque

$CL = 2b + \sqrt{2vx-x^2} - \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$. Taglio $BM = DQ = x$

e tirata la ordinata MR, e descritto col diametro $BD = 2v$ il semicircolo D7NB, sarà $MN = Q7 = \sqrt{2vx-x^2}$, $NR = 2b - AN = 2b - D7$, perchè AN ed NR = D7N. Per la qual cosa $MR = \sqrt{2vx-x^2}$ $= D7 = \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$; ma tale è il valor di KH; dunque

$+ 2b - \int \frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$ le due coppie di coordinate BM, MR;

CK, KH sono eguali; e per conseguenza la Cicloide ARD eguale DHQ; il che &c.

... per evoluta la Cicloide, di cui si cerchi l'evoluta RHD.

Sia la Cicloide AGD, da cui pende il peso, si eguagli al pavimento $AGD = 4v$,

il filo AR si eguagli, e questo si vada ripiegando lungo la detta cicloide, e tutta la Cicloide nel punto ARGH, e tirata la

Sia esso giunto nella positura, a cui si riferisce $DQ = x$, chiaro ordinata $GQ = y$; $GH = GD = s = 2\sqrt{2vx}$. Si segue

si suole essere GK $= ds = \sqrt{2v} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$, onde ne risulta

$Gg = dx$, $gK = dy$, continui la tangente GH, che determinerà la sottotangente

e si tiri la perpendicolare onde si determini la suttan-

Q7, e taglierà [illegible]. Dal punto H si delinei HLG parallela ad

gente QD parallela a DQ; e per la similitudine de' triangoli KGg, GHG

1B [illegible]

abbiamo la analogia

$q = \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$

$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{6}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \sqrt{\frac{2p^3}{4\cdot 27} - \frac{p^3}{27}}\right)} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{p}{6}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \sqrt{\frac{2p^3}{4\cdot 27} - \frac{p^3}{27}}\right)}$

$x = \sqrt[3]{\left(\frac{p}{6}\sqrt{\frac{2p}{3}} + \sqrt{-\frac{2p^3}{27}}\right)} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{p}{6}\sqrt{\frac{2p}{3}} - \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right)}$

$\frac{2p^3}{36\cdot 3} = \frac{p}{18\cdot 3}$

$x^2 + ax + 1$

$x = 2$

$\frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}} = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{6}} = \frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}$

$x^3 = 3x - 2$, $p = 3$, $q = 2$

$\sqrt{2} = 2\cdot\frac{3n^2-1}{1+n^2\sqrt{1+n^2}}$

$x = \sqrt[3]{(1+\sqrt{(1-1)})} + \sqrt[3]{1} - \sqrt{\ldots}$

$1 + x + x^2$

$1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+n^2}} \cdot \frac{3n^2-1}{1+n^2}$ $\quad x = 2$ $\quad x^2 \cdot \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x} \{ 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$

$\pm \frac{p}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}p}$ Donc $n = 3$, a nous $\frac{x}{1-x}$ $\quad 1 + x + x^2 + x^3$

$\pm \frac{p}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}p} = \pm \frac{p}{3}\sqrt{\frac{2p}{3}}$. $\frac{2p}{3} = \frac{4p}{3\cdot 1+n^2}$ =

$\frac{n+n}{2} = N$ $\quad \frac{n}{2} = N - 2$ $\quad 1 = \frac{2}{1+n^2}$

$3\,5N^2 - 4N + 4 - 1 = 3N^2 - 12N$

$\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ &c.

$1 - 2 = -1$, $1 - 2 + 4 = 3$, $1 - 2 + 4 - 8 = -5$, $1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$

$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

$- x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 \quad \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad + \frac{1}{64}$

1 complemento − 2

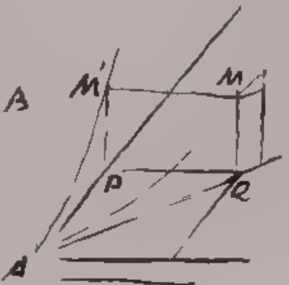
3 complemento − 4

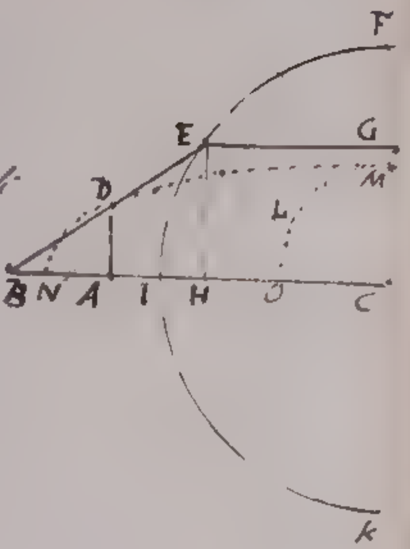
5 com − 8

Trovare la superficie generata dalla parabola AM, le cui projezioni AM', AQ, e l'equazione $Az = q^2$, essendo $AQ = q$, $QM = z$, e di più $AP = x$, $PQ = y = mx$, $QM = z = \frac{x^2}{a}$, ed $A = a(1+m^2)$, la qual parabola si gira intorno all'asse AA.

Il circolo descritto col raggio $AQ = q$ ha la sua circonferenza proporzionale a q. Quindi l'elemento della superficie cercata sarà come $q\sqrt{dq^2 + dz^2}$ ma per l'equazione $Az = q^2$ abbiamo $Adz = 2qdq$. e $dz^2 = \frac{4q^2dq^2}{A^2}$; dunque il nostro elemento come $qdq\sqrt{\frac{A^2+4q^2}{A^2}}$. Pongo $\frac{A^2+4q^2}{A^2} = \frac{4r^2}{A^2}$, onde si abbia $qdq = rdr$, e fatta la sostituzione trovo l'elemento come $\frac{2r^2dr}{A}$, ed integrando sarà la superficie cercata $\frac{2r^3}{3A} - B$. La superficie è nulla, quando $AQ = q = 0$: ma in questo caso $4r^2 = A^2$, ed $r = \frac{A}{2}$; dunque $\frac{2r^3}{3A} = \frac{A^2}{12} = B$. Per la qual cosa sarà la detta superficie come $\frac{2r^3}{3A} - \frac{A^2}{12}$: ma $r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + q^2}$, ed $r^3 = (\frac{1}{4}A^2 + q^2)\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + q^2}$; dunque la superficie come $\frac{2}{3A}(\frac{1}{4}A^2 + q^2)\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + q^2} - \frac{A^2}{12}$. e poichè $q^2 = Az$, avremo la superficie della parabolide come $\frac{2}{3A}(\frac{1}{4}A^2 + Az)\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + Az} - \frac{A^2}{12}$ $= \frac{2}{3}(\frac{1}{4}A + z)\sqrt{\frac{1}{4}A^2 + Az} - \frac{A^2}{12}$. Sostituisco $\frac{x^2}{a}$ in luogo di z, $a(1+m^2)$ in luogo di A, e trovo la bramata superficie

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}a(1+m^2) + \frac{x^2}{a}\right)\sqrt{\frac{1}{4}a^2(1+m^2)^2 + x^2(1+m^2)} - \frac{a^2(1+m^2)^2}{12}.$$





Il punto E della linea EB = FC sia sempre nel semicircolo FEIK il cui raggio verticale FC, e l'altro punto estremo B nel raggio orizzontale CI continuato: si dimanda qual curva MDN descriverà il punto D, che divida in due parti uguali la predetta linea EB.

Pongo CF = EB = 2a, e tirate DA, EH normali a CB, ed EG normale ad FC, stabilisco CA = x, AD = y, CG = p, GE = q. Per l'equazione al circolo avremo $4a^2 = p^2 + q^2$ (1). Inoltre chiaramente si vede esser EH = 2AD, e perciò $p = 2y$ (2). Egli è manifesto altresì che AH = CA − CH = x − q, e poichè BA = AH, ne risulta BH = 2x − 2q, e quindi $\overline{BE}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{EH}^2$, o analiticamente $4a^2 = 4x^2 - 8xq + 4q^2 + p^2$ (3), ovvero $\sqrt{(4a^2 - p^2)} = 2x - 2q$, ossia $q = x - \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2 - p^2)}$ (3)
Nella formola (1) sostituisco in luogo di q il suo valore, e trovo $4a^2 = p^2 + x^2 - x\sqrt{(4a^2 - p^2)} + \frac{4a^2 - p^2}{4}$
Ma per la formola (2.) $p^2 = 4y^2$; dunque sostituendo $4a^2 = 4y^2 + x^2 - x\sqrt{(4a^2 - 4y^2)} + a^2 - y^2$, e perciò $3a^2 - 3y^2 - x^2 = -x\sqrt{(4a^2 - 4y^2)}$, ed alzando al quadrato $9a^4 - 18a^2y^2 + 9y^4 - 6a^2x^2 + 6y^2x^2 + x^4 = 4a^2x^2 - 4y^2x^2$, e finalmente $9a^4 - 18a^2y^2 + 9y^4 - 10a^2x^2 + 10y^2x^2 + x^4 = 0$ (4)

Nel punto C ove CA = x = 0, si trova $(3a^2 - 3y^2)^2 = 0$, e quindi CM = y = a = AD

Quando E cade nel punto I abbiamo y = 0 e per conseguenza $9a^4 - 10a^2x^2 + x^4 = 0$, ovvero $x^4 - 10a^2x^2 + 25a^4 = 16a^4$, ed estraendo la radice $x^2 - 5a^2 = \pm 4a^2$, $x^2 = \begin{cases} 9a^2 \\ a^2 \end{cases}$, e per ultimo $x = \begin{cases} 3a \\ a \end{cases}$. Segnata IN = a, ne risulta CN = 3a = x, y = 0, ed il punto N appartiene alla curva MDN, di cui abbiamo determinata l'equazione.

Può anche il punto C della linea CF restar immobile, ed il punto F muoversi lungo il quadrante FEI, ed in questa ipotesi il punto M descrive il quadrante circolare MLO.

N. 14.

E qui egli è d'uopo osservare, che la forma la (4) si agguaglia a

$(9a^2-9y^2-x^2)\cdot(a^2-x^2-y^2)=0$, e perciò consta dalle due radici $9a^2-x^2-9y^2=0$, $a^2-x^2-y^2=0$. La prima radice somministra un'ellisse $9a^2-x^2=9y^2=\frac{9a^2y^2}{a^2}$, i cui semiassi $CN=3a$, $CM=a$: la seconda radice determina un cerchio, il cui raggio $CM=a$. Ora quantunque le due nominate curve sieno del secondo grado, l'aggregato loro appartiene al quarto, ed in fatti possono esser tagliate in quattro punti da una linea retta.

Ho sciolto il problema nel caso più semplice, che la linea ZC dal punto M sia tagliata in due parti eguali. Supponendo per altro CM : MZ in qualsivoglia ragione, la curva MDN è sempre un'elisse. Sia $CZ=b$, $CM=c$, $MZ=g$, ed il resto come sopra. L'equazione al circolo ZQ mi dà $b^2=p^2+q^2$ (5). Dall'analogia

AQ : BD :: HQ : AD

$b : c :: p : \frac{pc}{b}$ raccolgo $AD=\frac{cp}{b}$

e quindi $\frac{cp}{b}=y$, e $p=\frac{by}{c}$ (6). Poichè $AH=CA-CH=x-q$, facciasi QD : AH :: QA : AH

$g : x-q :: b : \frac{b\cdot(x-q)}{g}$

e si troverà $AH=\frac{b\cdot(x-q)}{g}$. Avremo pertanto $\overline{AQ}^2=\overline{AH}^2+\overline{QH}^2$, o analiticamente

$b^2=\frac{b^2(x^2-2xq+q^2)}{g^2}+p^2$, ovvero $\frac{g}{b}\sqrt{(b^2-p^2)}=x-q$, ossia $x-\frac{g}{b}\sqrt{(b^2-p^2)}=q$ (7). Nella formula (5.) sostituisco in cambio di q lo scoperto valore, e mi si presenta $b^2=p^2+x^2-\frac{2gx}{b}\sqrt{(b^2-p^2)}+g^2-\frac{g^2p^2}{b^2}$. Ma per la formula (6.) $p^2=\frac{b^2y^2}{c^2}$; dunque

$b^2=\frac{b^2y^2}{c^2}+x^2-\frac{2gx}{b}\sqrt{(b^2-\frac{b^2y^2}{c^2})}+g^2-\frac{g^2y^2}{c^2}$; dunque

$b^2-g^2+\frac{(g^2-b^2)\cdot y^2}{c^2}-x^2=-\frac{2gx}{b}\sqrt{(b^2-\frac{b^2y^2}{c^2})}$, semplificata

~~essendo $b^2-g^2=c^2$, e perciò $-c^2-y^2-x^2=-2gx\sqrt{(c^2-y^2)}$~~

e per conseguenza $\frac{(b^2-g^2)}{c^2}\cdot(c^2-y^2)-x^2=-\frac{2gx}{c}\sqrt{(c^2-y^2)}$

Alzo il tutto al quadrato, sostituendo prima in vece di $\frac{b^2-g^2}{c^2}$ il suo valore $\frac{c+2g}{c}$, e trovo

$(\frac{c^2+4cg+4g^2}{c^2}).(c^4-2c^2y^2+y^4)-2x^2(\frac{c+2g}{c}).(c^2-y^2)+x^4$

$=\frac{4g^2x^2}{c^2}.(c^2-y^2)$: Questa formola si riduce così

$(c+2g)^2.c^2-(c+2g)^2.y^2-(c+2g)^2x^2-(c+2g)^2y^2+(\frac{c+2g}{c^2})^2.y^4$
$+(\frac{c+2g}{c^2})^2.x^2y^2-x^2(c^2-y^2-x^2)=0$, ed è composta dai

due fattori, o radici

$((c+2g)^2-(\frac{c+2g}{c^2})^2.y^2-x^2).(c^2-y^2-x^2)=0$

La prima radice è all'ellisse, i cui semiassi $c+2g$, c; la seconda radice è al circolo.

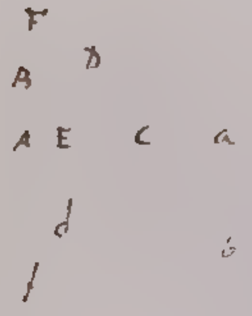
La soluzione del nostro problema ci insegna una nuova maniera di descriver l'ellisse, i cui semiassi stiano in qualunque ragione di $m:n$. onde si abbia $c+2g:c::m:n$, e per conseguenza $cm=cn+2gn$, ossia $c.(\frac{m-n}{2n})=g$. Ma $c+g=b$, e $b-c=g$; dunque $c.(\frac{m-n}{2n})=b-c$ e quindi $c.(\frac{m+n}{2n})=b$, e $c=\frac{2n.b}{m+n}$, e $g=b-c=b-\frac{2nb}{m+n}=\frac{(m-n)b}{m+n}$, e finalmente $c+2g=\frac{2n.b}{m+n}+\frac{(2m-2n)b}{m+n}=\frac{2m.b}{m+n}$. I due semiassi pertanto saranno $c+2g=\frac{2mb}{m+n}$, $c=\frac{2nb}{m+n}$ e si corrisponderanno nella prescritta ragione di $m:n$. Se per esempio sia $m:n::3:1$ scriveremo $CM=c=\frac{1}{2}b$, $M7=g=\frac{1}{2}b$, $CN=c+2g=\frac{3}{2}b$. I due semiassi non possono agguagliarsi, senon quando $M7=g=0$, ed in questo caso il quadrante circolare MLO, e l'ellittico MDN coincidono col quadrante circolare 7Q1. Qualunque ragione $m:n$ maggiore della egualità può adattarsi ai due semiassi CN, CM, la quale ascende all'infinito, qualora $CM=c=0$, $C7=g=b$, e $CN=c+2g=2b$; ed in tal caso l'ellissa MDN diviene una linea retta $=2b$.

Non tralascio di riflettere, che le equazioni locali del terzo, e del quarto grado ricavano un

eleganti

elegante costruzione, quando riesca di risolverla in due fattori, i quali se l'equazione spetta al terzo grado, sono uno del primo grado, e l'altro del secondo, e se l'equazione compete al quarto grado sono tutti e due del secondo grado.

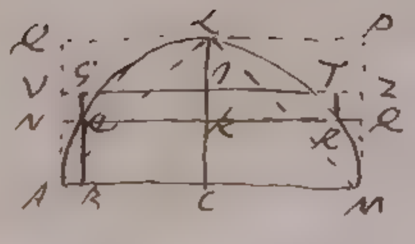
Ponendo nella formola (4) $y = f$. trovo $\left((c+ng)^2 - \frac{(c+ng)^2}{c^2} \cdot f^2 - x^2\right) \cdot (c^2 - f^2 - x^2) = 0$, ed agevolmente ne raccolgo i quattro valori di x, cioè $\frac{(c+ng)}{c} \cdot \sqrt{(c^2 - f^2)} = \pm x$; $\sqrt{(c^2 - f^2)} = \pm x$, che saranno reali, se $c > f$, o anche $c = f$, e diverranno immaginarj, se $f > c$. Determinata nella ~~una l'equazione del terzo grado acx^2 …~~ formola (4) $x = h$ mi si presenta $\left((c+ng)^2 - \frac{(c+ng)^2}{c^2} \cdot y^2 - h^2\right) \cdot (c^2 - h^2 - y^2) = 0$, e con facilità trovo i quattro valori di y $\frac{c\sqrt{((c+ng)^2 - h^2)}}{c+ng} = \pm y$, $\sqrt{(c^2 - h^2)} = \pm y$, che saranno tutti reali se h non sia maggiore di c. Acciocchè tutti divengano immaginarj egli è necessario che sia $h > c+ng$.



Abbiasi l'equazione del terzo grado $acx^2 - cbxy - axy^2 + by^3 = 0$, la quale è formata dai due fattori $(ax - by) \cdot (cx - y^2) = 0$. Descrivo primieramente la linea retta (fig. a.) $A C b$, dunque tale che sia $CA = x : Aa = y :: b : a$, e poscia col parametro $= c$ la parabola DCd. L'aggregato di questi due luoghi determina le tre radici dell'equazione $ax - by = 0$, $\pm\sqrt{cx} - y = 0$. Se per esempio si stabilisca $y = a$, si troveranno i due valori di x, cioè $x = b$, $x = \frac{a^2}{b}$, e se si determini $y = -a$, si scoprirà $x = -b$ $x = \frac{a^2}{b}$. Assegnato ad x il valore b, ne provviene $y = a$, $y = \pm\sqrt{cb}$, e posto $x = -b$, ne risulta $y = -a$, $y = \pm\sqrt{cb}\sqrt{-1}$, ed in tal caso y ha un solo valor reale, e due immaginarj.

113 15

Soluzione di un
Problema Geometrico.



Trovare la solidità della sfera $\frac{2}{3}\pi$ ...

Sia $AC = a$, $AB = x$, $BC = a - x$. $BR = y$, $RS = dy$, la semicirconferenza del circolo il cui raggio $BC = RK = a - x$ $n \cdot \overline{a - x}$, e con la semicirconferenza del circolo il cui raggio $AC =$ ... a, (na). L'aree dei predetti circoli $n \cdot \overline{a^2 - 2ax + x^2}$, ($na^2$). Ciò posto sarà la solidità del ... cilindro $SRRT$ elemento della sfera $n \cdot \overline{a^2 - 2ax + x^2} \cdot dy = ds$; e sostituito in cambio di $-2ax + x^2$ il suo valore ($-y^2$) cavato dalla equazione al circolo $2ax - x^2 = y^2$, $n \cdot \overline{a^2 - y^2} \cdot dy = ds$. Si osservi che essendo na^2dy l'elemento $VNRZ$ della ... del cilindro $NAMQ$ circoscritto alla sfera, $na^2dy - ny^2dy$ l'elemento $SRRT$ della porzione di sfera $RAMR$ resta che ny^2dy sia l'elemento $VNRSZRRT$ del solido NAR ... MR differenza tra il cilindro $NAQM$, e la porzione di sfera $RAMR$. Passando alla integrazione avremo $na^2y - \frac{ny^3}{3} = s$ formola che esprime la solidità della porzione di sfera $RAMR$. na^2y è la solidità del cilindro ..., $\frac{ny^3}{3}$ ~~la solidità~~ quella del solido $NARQMR$ ... sopra nominato.

Corollario 1°.

Posta $y = a$, si trova $na^3 - \frac{na^3}{3} = \frac{2}{3}na^3 = s$. ($na^3$) è la solidità del cilindro $QAMP$ circoscritto alla semisfera ALM; $\frac{na^3}{3}$ la solidità della scodella $QLCAQLRMP$, e la loro differenza $\frac{2}{3}na^3$ la solidità dell'emisferio ALM.

Corollario 2do

La solidità dell'emisferio e dell cilindro all'emisferio circoscritto, ... le solidità della sfera e del cilindro alla sfera circoscritto stanno in ragione di $2:3$

Corollario 3°

... ~~scodella~~ semisfera alla scodella sta come $2:1$; ... scodella al cilindro come $1:3$.

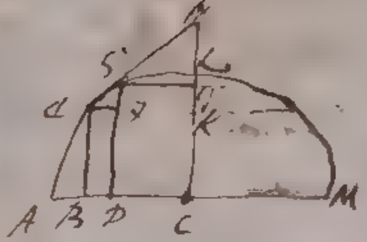
Corollario 4.to

... ALM inscritto nell'emisfero, che come è noto ... terza parte del cilindro $QAMP$, si ... è la metà dell'emisferio

Corollario 5.to

... cono, la differenza tra il cono e l'emisferio, la differenza tra l'emisferio e il cilindro da cui chiaramente ... ~~[illegible]~~ fra loro ed alla terza parte del cilindro.

Trovare la superficie della sfera .. 225



Sia $AB = x$ $BD = e\lambda = dx$

$BC = y$ $\lambda S = dy$ $eS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$AC = a$ $DC = a - x - dx = S\lambda$

Si trovi la SH col mezzo della analogia

$e\lambda : eS :: S\lambda : SH$

$dx : \sqrt{dx^2+dy^2} :: a-x-dx : \frac{(a-x-dx)\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} = SH$

$eH = eS + SH = \sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{(a-x)\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

Semicirconferenza del circolo il cui raggio $S\lambda = a-x-dx$

n ... di semicirconferenza del circolo il cui raggio

$eK =$ ~~$dx+a-x$~~ $a-x$: $n \cdot \overline{a-x}$

Superficie del cono HKe eguale a $\overline{\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{a-x-dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}}$
$\cdot \overline{na-nx}$

Superficie del cono $H\lambda S$ eguale ad $\frac{\overline{a-x-dx}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} \cdot \overline{na-nx-ndx}$

La superficie del tratto conico $S\lambda Ke$ è uguale alla differenza delle superficie ritrovate, e si eguaglia alla seguente

$\overline{na-nx}\sqrt{dx^2+dy^2} + \overline{na-nx} \cdot \frac{\overline{a-x-dx}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

$-na+nx\ \frac{\overline{a-x-dx}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx} + \frac{ndx \cdot \overline{a-x-dx}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

Resta adunque cancellati i due termini che si elidono

$\overline{na-nx}\sqrt{dx^2+dy^2} + \overline{na-nx-ndx}\sqrt{dx^2+dy^2} =$

$\overline{2na-2nx-ndx}\sqrt{dx^2+dy^2} = ds$ elemento della superficie della sfera. Si può cancellare il termine $-ndx$ come incomparabile onde si avrà

$\overline{2na-2nx}\sqrt{dx^2+dy^2} = ds$

Si trovi sommare una delle incognite ricorrendo alla equazione al circolo $2ax - x^2 = y^2$. Donde differenziando $2adx - 2xdx = 2ydy$, o sia dividendo per $2y$ $\frac{adx - xdx}{y} = dy$,

228

Ed alzando il tutto al quadrato $\overline{a^2-2ax+x^2}.\ dx^2 = dy^2$

e sostituendo in cambio di (y^2) il suo valore $2ax - x^2$

avremo $\frac{\overline{a^2-2ax+x^2}\ dx^2}{2ax-x^2} = dy^2$: Questo valore si metta

in vece di (dy^2) nella formula superiore e si troverà

$$2na - 2nx\sqrt{dx^2 + \frac{\overline{a^2-2ax+x^2}\ dx^2}{2ax-x^2}} = ds$$

e ne riducendo allo stesso denominatore

$$2na-2nx\sqrt{\frac{2ax\,dx^2 - x^2dx^2 + a^2dx^2 - 2ax\,dx^2 + x^2dx^2}{2ax-x^2}} =$$

$$2na - 2nx\sqrt{\frac{a^2dx^2}{2ax-x^2}} = \frac{\overline{2na-2nx}\ .+a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} =$$

Questa espressione si può scrivere nella seguente maniera $\frac{2na\ .\ \overline{a-x}\ .\ dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2na\ .\ \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = ds$

~~2na d. ... + 2na. ...~~

~~...~~

~~La somma del ...~~

Ad ... e noi la doppia circonf

~~...~~ (a)

la somma ~~del ... ...~~

~~Ad ... della doppia circonferenza ... tutto ...~~ essendo la vostra formula

~~...~~ La somma della 2ª formula si eguagli

$+2na.\sqrt{2ax-x^2} = s$. e posta $x = a$ si trova la detta

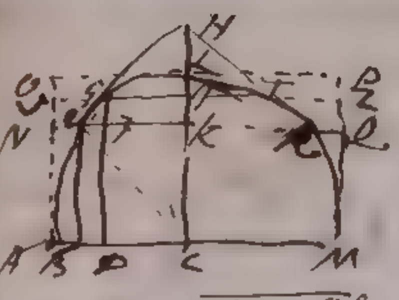
somma eguale a $+2na\sqrt{2a^2-a^2} = +2na\ .\ a = +2na^2 = s$

La trovata sommatoria altro non è che la superficie della

semisfera A Q S L M. Ma na^2 è la superficie del circolo

generatore: dunque la superficie della semisfera è doppia e la

superficie dell'intiera sfera quadrupla del circolo generatore; ...



In altra maniera

La semicirconferenza del circolo il cui raggio $S'T$ sia $= nS'T$. La semicirconferenza del circolo il cui raggio $QX = QT + S'T$ sia $n \cdot \overline{QT + S'T}$. È noto che la superficie del cono $HS'T$ si eguaglia ad $n \cdot S'T \cdot S'H$, la superficie del cono HQR ad $n \cdot \overline{QT + S'T} \cdot \overline{QS' + S'H}$. La superficie del tronco conico $S'QRT$ che ravvoglia la differenza delle dette due superficie s'eguaglierà ad $n \cdot \overline{QT + S'T} \cdot \overline{QS' + S'H} - n S'T \cdot S'H =$ $n \cdot QT \cdot QS' + n \cdot QT \cdot S'H + n \cdot S'T \cdot QS'$. L'analogia $QT : QS' :: S'T : S'H$ mi insegna essere $QT \cdot S'H = QS' \cdot S'T$ sostituito un valore in cambio dell'equivalente, si troverà la superficie del tronco conico $S'QRT$ eguale ad $n \cdot QT \cdot QS' + 2n \cdot S'T \cdot QS' = 2n \cdot \overline{\tfrac{1}{2}QT + S'T} \cdot QS'$.

Corollario I

La superficie di un tronco conico (il cono si suppone retto) si eguaglia a quella d'un cilindro retto, il raggio della cui base sia medio aritmetico fra i raggi della base inferiore e superiore del tronco conico, ed il lato QS'. In fatti $\tfrac{1}{2}QT + S'T$ è un raggio medio aritmetico fra i due $QT + S'T$, $S'T$; $2n \cdot \overline{\tfrac{1}{2}QT + S'T}$ è la circonferenza del circolo, che è la base del cilindro, e $2n \cdot \overline{\tfrac{1}{2}QT + S'T} \cdot QS'$ è la superficie del cilindro fondato sulla menzionata base ed avente per lato la linea QS'.

Corollario II

Se la differenza QT fra i raggi delle basi del tronco conico sarà infinitamente piccola, in tal caso aggiunta la quantità $\tfrac{1}{2}QT \cdot QS'$ nasciturne siccome infinitesima del 2.do ordine, si troverà la superficie del tronco conico $2n \cdot \overline{QT + S'T} \cdot QS'$, cioè eguale a quella di un cilindro che abbia la stessa base del tronco conico, ed il lato eguale ad QS'.

Chiamo $AC = a$, $AB = x$, $BC = QT + S'T = a - x$, $BD = QT = dx$, $TS' = dy$, $QS' = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, e sarà fatte le debite surrogazioni la superficie del nostro tronco conico che diremo $dS = 2n \cdot \overline{a - x} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Da questa superficie viene espresso l'elemento della superficie della sfera generata dal semicircolo ALM che si gira intorno l'asse CL. Col mezzo dell'equazione al circolo $2ax - x^2 = y^2$ si faccia svanire

lineogramma

224

l'incognita x e .A. troverassi, come si è detto, abbiamo $a^2 - 2ax + x^2 = a^2 - y^2$ e uscendo la radice $x - a = \sqrt{a^2 - y^2}$ e differenziando $-dx = \frac{-y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}$ o sia $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{a^2 - y^2}$. Sostituiti questi valori nella formula superiore si scoprirà

$$ds = 2\pi \sqrt{a^2-y^2} \cdot \sqrt{\frac{y^2 dy^2}{a^2-y^2} + dy^2} = 2\pi \sqrt{a^2-y^2} \frac{\sqrt{y^2dy^2 + a^2dy^2 - y^2dy^2}}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

$= 2\pi a\,dy$ ed integrando $s = 2\pi a y$.

Corollario 1.°

La superficie della porzione di sfera ACRM si eguaglia a quella della porzione corrispondente del cilindro circoscritto ANQM la cui superficie si trova moltiplicando la circonferenza stessa della base in il lato $y = AN = BC$ onde si avrà il prodotto $2\pi a y$, che abbiamo di sopra trovato eguale alla superficie della porzione di sfera ACRM.

Corollario 2.do

Posto $y = a$ avremo $s = 2\pi a^2$ misura della superficie semisfera ALM, la quale per la ragione allegata nel 1.° corollario si eguaglia a quella del cilindro circoscritto AOPN.

Corollario 3.°

La superficie della semisfera è doppia di quella del circolo generatore, la quale si eguaglia a (πa^2). Conseguentemente la superficie della intera sfera è quadrupla di quella del circolo generatore.

Corollario 4.to

Giacché la superficie cilindrica ANLM è uguale alla sferica corrispondente ACRM, e così pure la cilindrica OPM alla sferica ALM, ne segue, che la cilindrica QOPL pareggia la sferica CL.R., e generalmente che qualsivoglia parte regolare della superficie cilindrica NUZ... racchiusa da circoli paralleli si eguaglia alla corrispondente sferica EGTR. Corollario 5.to Supposto alla semisfera uni... se così è, gli elementi della superficie, del cilindro, e della sfera saranno eguali, il che di fatto è vero essendo entrambi eguali a ($2\pi a\,dy$). Questo dato basterà per iscoprire, che essendo pari tutti i corrispondenti elementi, ei deve eguagliarsi fra le superficie della semisfera e del cilindro circoscritto.

prendendosi di sopra trovato $ds = an \cdot \overline{a-x}\sqrt{dx^2+dy^2} = an \cdot BC \cdot QS$ fatta la riflessione, che à linea QH tocca il circolo nel punto Q, di modo in condotto il raggio QC l'angolo HQC è retto, si averebbe facilmente scoperto, che i triangoli QCB QS7 sono simili, e che passa proporzionalità le linee

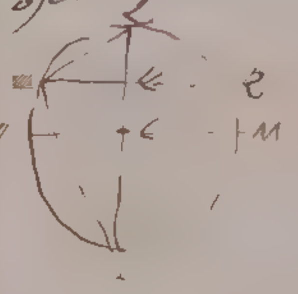
QC : BC :: QS : S7

a : a-x :: $\sqrt{dx^2+dy^2}$: dy onde si verifichi l'equazione

$\overline{a-x}\sqrt{dx^2+dy^2} = a\,dy$ ~~[illegible]~~ sostituito questo ultimo valore in cambio della equivalente nella superiore formola, si trova senz'altro giro di calcolo

$ds = an\,a\,dy$. Ho dunque il altro metodo in grazia che i principianti faciano pratica delle operazioni analitiche.

Corollario 7mo

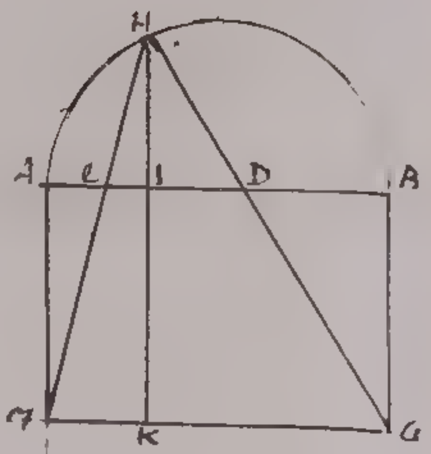


eguagliandosi la superficie della porzione di sfera QLR ad n.2AC.LK = nJL.LK, ed essendo che per la nota proprietà del circolo JL.LK = $\overline{QL}^2$ ne segue che la superficie della porz. di sfera QLR si eguagli ad n.$\overline{QL}^2$, che è quanto dire al circolo il cui raggio QL. Per la stessa ragione la superficie della intera sfera QKR si eguaglierà al circolo a cui raggio QI.

Dimostrazione
di un Teorema Geometrico con figure.

Teorema.

Condotta al punto A del diametro AB del semicircolo AHB la normale $AF = \frac{AB}{\sqrt{2}}$, e compiuto il rettangolo AFGB, dico che dirette al punto qualunque H del semicircolo AHB le rette FCH, GDH, sarà $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2$.



Lemma

Il doppio rettangolo 2.AC.DB si eguaglia al quadrato $\overline{CD}^2$. Si tiri HK parallela ad AF

La similitudine delle tre coppie di triangoli HKF, FAC; HKG, GBD; HFG, HCD ci somministra le analogie

$HK : KF = AI :: AF : AC = \frac{AI.AF}{HK}$,

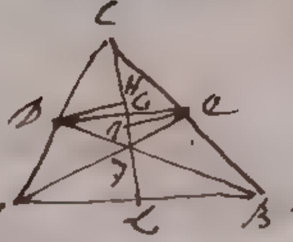
$HK : KG = IB :: BG = AF : BD = \frac{(IB).AF}{HK}$,

$HK : HI :: FG = AB : CD = \frac{AB.HI}{HK}$.

Avremo pertanto $2.AC.DB = \frac{2.AI.AF.(IB).AF}{\overline{HK}^2}$ $= 2\overline{AF}^2.AI.IB$: ma $2\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2$, e per la proprietà del circolo $AI.IB = \overline{HI}^2$; dunque $2AC.DB = \frac{\overline{AB}^2 \times \overline{HI}^2}{\overline{HK}^2}$. E poichè per la terza analogia $\overline{CD}^2 = \frac{\overline{AB}^2.\overline{HI}^2}{\overline{HK}^2}$, ne segue essere $2AC.DB = \overline{CD}^2$; il che &c.

Dopo ciò dimostro $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2$; imperciocchè essendo $AB = AC + CD + DB$, $AD = AC + CD$, $CB = CD + DB$, si scoprirà $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2AC.CD + 2CD.DB + 2AC.DB$, e $\overline{AD}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + 2AC.CD + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2CD.DB$ $= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2AC.CD + 2CD.DB + \overline{CD}^2$. Ora avendo dimostrato $2AC.DB = \overline{CD}^2$, i due omogenei di comparazione si eguagliano, e per conseguenza $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CB}^2$; il che &c

Teoremi due
Geometrici

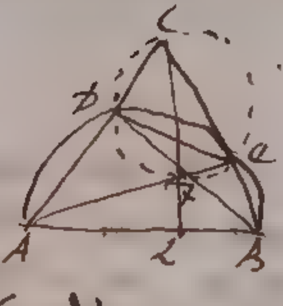


Se nel triangolo ABC si dividono per metà i lati AC, BC nei punti D, E, e si tirano le linee BD, AE che si taglino nel punto Z, dico che condotta la linea CZL, taglierà per metà la linea AB nel punto L.

Dimostrazione

Sono eguali i triangoli ADB, BEA, perchè ciascuno è la metà del triangolo ABC; dunque detratto il comune triangolo AZB, resterà ADZ = BEZ: ma ADZ = CDZ, BEZ = CEZ; dunque CDZ = CEZ. E giacchè questi triangoli hanno la base comune CZ, condotte ad essa le normali DG, EI, hanno da esser eguali. Si meni la linea DE che tagli la CL nel punto G. I triangoli DHG, EIG sono simili, perchè gli angoli H, I sono retti e gli angoli DGH, EGI sono opposti al vertice: ma di più DH = EI; dunque DG = EG. Essendo CD : CA :: CE : CB, le linee DE, AB sono parallele. E perchè CD : CA :: DG : AL; ma CD è la metà di CA: dunque DG sarà la metà di AL. Per una simile ragione GE sarà la metà di BL, e poichè DG = EG, si scoprirà AL = BL; il che ecc.

Teorema II.



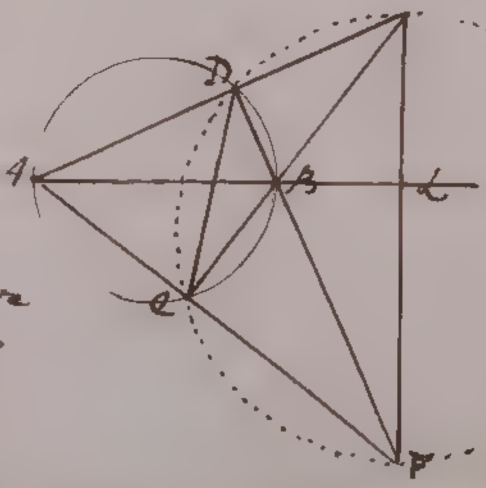
Se nel triangolo ABC si tira dal punto A alla linea BC la normale Ae, dal punto B alla linea AC la normale BD, le quali due normali si taglino nel punto 7, dico che condotta dal punto C pel punto 7 la retta C7L, sarà essa normale ad AB.

Preparazione

Siano primieramente acuti gli angoli CAB, CBA, Poichè sono retti gli angoli ADB, AeB, il semicircolo ADeB descritto sopra il diametro AB passa per i punti D, e. Similmente il circolo CD7eC delineato col diametro C7 passa per i punti D, e; perchè gli angoli 7DC, 7eC sono retti. Si tiri la linea De.

Dimostrazione.

Insistendo sopra lo stesso arco D7, i due angoli DC7, DC7, o sia DeA, ACL, sono fra loro eguali. Non altrimenti si eguagliano gli angoli DeA, DBA; perchè insistono sopra il medesimo arco AD. Si inferisca pertanto uguaglianza fra gli angoli DBA, ACL. Dunque nei triangoli DBA, ACL sono eguali i predetti angoli, ed inoltre comune è l'angolo A; e perciò l'angolo ADB pareggerà l'ALB: ma l'angolo ADB è retto; dunque sarà retto anche l'ALB, e quindi CL normale ad AB, il che &c.



Se l'angolo ABC fosse ottuso, in tal caso la normale AD condotta al lato AC cade come sopra dentro del triangolo ABC, ma la normale Ae al lato CB, che si dee continuare cade fuori del detto triangolo.

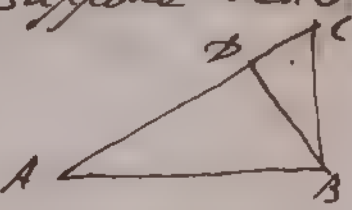
La

Le mentovate due normali DA, AC si tagliano fuori di esso triangolo nel punto 7. Fatta passare pei punti C7 la retta CL7, intersecherà ad angoli retti la base AB prodotta nel punto L. Si descrivano coi diametri AB, C7 i circoli ADBC, 7ADC7, ossia la linea DA.

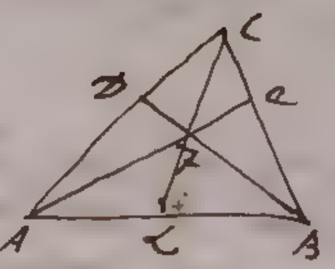
Dimostrazione.

Gli angoli DCA, DC7 formano due retti e lo stesso si osserva degli angoli DC7, DC7; dunque DCA = ACL : ma DCA o sia ACL = DBA perchè ambo insistono sullo stesso segmento AD del circolo ADBC; dunque ACL = DBA. Nei triangoli ACL, DBA sono eguali i prodotti angoli ACL, DBA, e di più l'angolo CAL, o sia DAB comune. Dunque anche l'angolo ALC pareggierà l'angolo ADB, e poichè l'angolo ADB è retto, sarà tale anche l'ALC; il che ec.

Il terzo ed ultimo caso, che suppone retto l'angolo ABC, non contiene veruna difficoltà. Ed infatti pel punto B condotta BD normale ad AC, e pel punto A la normale a BC, che coincide colla base AB, le dette due normali si incontreranno nel punto B. Ora tirata una linea pei punti B, C, cada questa sopra il lato BC, il quale per l'ipotesi forma angolo retto colla base AB.



Teorema III.



Se nel triangolo ABC si divida per metà l'angolo A colla linea AE, l'angolo B colla linea BD, dico che condotta nel punto F, in cui esse linee si tagliano, e pel punto C la retta CFL, dividerà essa in due parti eguali l'angolo C.

Dimostrazione

Essendosi nel triangolo CAL diviso l'angolo A per metà, si avrà l'analogia AC : AL :: CF : FL. Similmente nel triangolo CBL dividendo la linea BF in due parti eguali l'angolo B, si avrà l'analogia BC : BL :: CF : FL. Sicchè l'analogia AC : AL :: BC : BL, e farisca essere proprietà che dimostra essere l'angolo C diviso per metà dalla linea CFL; il che &c.

Problema
Inscrivere l'eneagono nel
Circolo

Problema

Inscrivere l'Ennagono nel Circolo.

Si riduce questo Problema a delineare un triangolo ACA isoscele (Fig. 1), in cui ciascun angolo alla base sia quadruplo di quello al vertice. Si supponga descritto questo triangolo, e diviso l'angolo CAA in quattro parti uguali, come la figura dimostra, e si faccia $AC = a$, $AA = x$.

I triangoli CAA, AAD sono simili, e perciò si avrà $AC : AA :: AA : AD$

$$a : x :: x : \frac{x^2}{a} = AD$$

Inoltre essendo gli angoli CAQ, QAA uguali, si verifica l'analogia $AC : AA :: CQ : AQ$, e componendo $AC + AA : AA :: CQ + QA : AQ$

$$a + x : x :: a : \frac{ax}{a+x} = AQ$$

e quindi $AQ - AD = DQ = \frac{ax}{a+x} - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2x - ax^2 - x^3}{a^2 + ax}$

Passa similitudine fra i triangoli QDA, ADC che ci somministra l'analogia

$$QD : DA :: DA : DC$$

$$\frac{a^2x - ax^2 - x^3}{a^2 + ax} : x :: x : \frac{x^2 \cdot (a^2 + ax)}{a^2x - ax^2 - x^3}$$

da cui si raccoglie $DC = \frac{a^2x + ax^2}{a^2 - ax - x^2}$: ma $AD + DC = AC = a$; dunque $\frac{x^2}{a} + \frac{a^2x + ax^2}{a^2 - ax - x^2} = a$, e quindi fatte le debite operazioni $x^4 + ax^3 - 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$

Pongo $x = z - \frac{a}{4}$, ed i computi mi insegnano essere $z^4 - \frac{27a^2z^2}{8} - \frac{3a^3z}{8} + \frac{333a^4}{256} = 0$. Stabilisco $z^2 = ay$ e trovo $a^2y^2 - \frac{54a^3y}{16} - \frac{6a^3z}{16} + \frac{333a^4}{256} = 0$, e dividendo per a^2, supplendo al quadrato, e riducendo l'equazione, $y^2 - \frac{54}{16}ay + \frac{729a^2}{256} = \frac{6az}{16} + \frac{396a^2}{256}$, ossia $\left(\frac{27a}{16} - y\right)^2 =$ ~~[illegible]~~ $= \frac{3a}{8} \cdot \left(z + \frac{132a}{32}\right)$

All'asse $A'''A^2$ (Fig. 2), col vertice in Q descrivo la parabola $C'''C''QCC'$ corrispondente all'equazione $z^2 = ay$, nella quale all'ascissa $QA = z$ si riferirà l'ordinata $AC = y$. Tagliata $QA = \frac{1}{4}a$, resterà $AA = x$. Segno poscia $QG = \frac{27a}{16}$, e condotta $7G5'$ parallela a $A'''A^2$,

si

si determina $DC = AD - AC = \frac{27a}{16} - y$. Fatta $FG = \frac{132a}{32}$, ne risulta $FD = FG + GD = \frac{132a}{32} + 2$.
All'asse FD col parametro $= \frac{3a}{4}$ si descrive la parabola $CC''FC'''C'$, le cui coordinate $FD = \frac{132a}{32} + 2$, $DC = \frac{27a}{16} - y$; taglierà questa la parabola primitivamente descritta in quattro punti C, C', C'', C''' che somministrano altrettanti valori di x, due positivi AB, AB', e due negativi AB'', AB'''.

Il valore AB serve alla soluzione del Problema, essendo AB il lato dell'ennagono, e l'arco AGB (fig. 1) la nona parte del circolo. La costruzione frattanto mi dà molto di più; imperocchè l'arco $C'H'A'$ (fig. 3) si agguaglia alla nona parte di due semicircoli, ossia a $\frac{2}{9}$ di un circolo, e l'arco $A'C'H'A'$ a $\frac{4}{9}$, e l'arco $AG'A'$ alla nona parte di cinque circoli, ovvero a $\frac{5}{9}$ di un circolo. La fig. 4 divide il circolo in tre parti uguali, e perciò ciascun arco pareggia o la nona parte di tre circoli, o $\frac{3}{9}$ di un solo circolo, e l'arco $A''C''H''A''$ a $\frac{6}{9}$ di circolo.
Ogni arco AHC, AIC della fig. 4 si agguaglia alla nona parte di quattro circoli, o pure a $\frac{4}{9}$ di circolo, e per conseguenza l'arco $AICHA$ ad $\frac{8}{9}$ di circolo. Finalmente l'arco $AG'''B'''$ (fig. 5ª) è uguale alla nona parte di sette circoli, ossia a $\frac{7}{9}$ di circolo.

La costruzione dunque ci pone sotto gli occhi la serie degli archi uguali a $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ di circolo, ed esaurisce la divisione del circolo in nove parti.

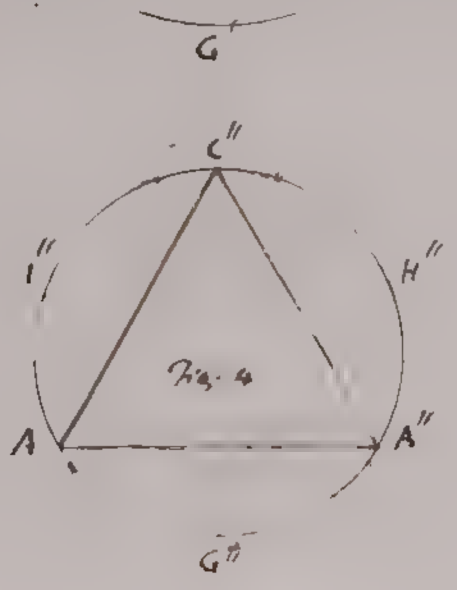
Costruzione seconda.

Poichè (fig. 2) $AB'' = -x = a$, e perciò $x + a = 0$, dividasi per tal quantità l'equazione $x^4 + ax^3 - 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$, e ne proverrà il quoziente $x^3 - 3a^2x + a^3 = 0$.
Pongo $x^2 = ay$; ed ho, per la sostituzione $axy - 3a^2x + a^3 = 0$ e quindi $(3a - y) \cdot x = a^2$, equazione all'iperbola fra gli assintoti.

All'asse $B'''B'$ (fig. 6), col vertice in A, e col parametro $= a$ delineo la parabola $C'''ACC'$, le cui coordinate $AB = x$, $BC = y$. Segue poscia nella AG normale

a

a $A'''A'$ la linea $AH = 3a$, e tirata
a $A'''B'$, e prolungata AC sino in
fra gli assintoti $D'''HD'$, AHG d
di iperbola CIC', $C'''I$ relati
$(3a-y) \cdot x = a^2$, che ha per coo
$= 3a-y$, il cui prodotto $= a^2$.
tra curva in tre punti C, C',
mano le tre radici dell' equa
eguali ad AB, AB', AB''', che
che la prima costruzione ha da


G
C''
I''
H''
Fig. 4
A
A''
G''

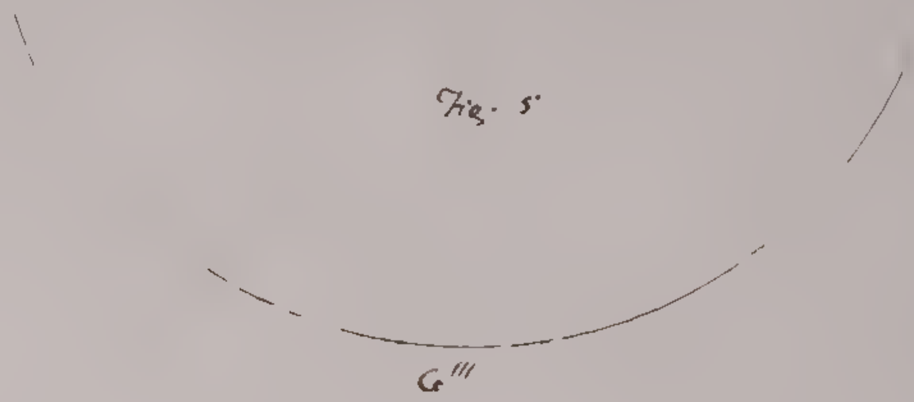


Fig. 5
G'''

Della Cicloida
e della
sua proprietà.

Della Cicloide,
e delle
principali sue proprietà.

Equazione della Cicloide.

1. La linea AB si aguagli alla semicirconferenza PGQ = BZD, del circolo descritto col diametro PQ = BD = 2r. Da principio il punto G coincida col punto A; e poscia applicandosi i punti dell'arco GP ad altrettanti punti della retta AP, sia il punto G pervenuto in G descrivendo la curva AG, che si appella Cicloide. Egli è chiaro essere l'arco GP uguale alla retta AP, e per conseguenza l'arco GQ = PB. Ma tirata GE parallela ad AB, gli archi GQ, ZD sono eguali, e GZ = EB; dunque l'arco DZ = ZG. Fatta DE = x, sarà l'arco $DZ = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, ed $EZ = \sqrt{2rx-x^2}$, e perciò $EG = EZ + ZG = y = \sqrt{2rx-x^2} + \int \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, equazione della Cicloide.

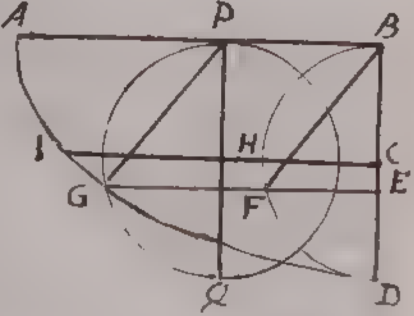


Fig. 1

Rettificazione della Cicloide.

Si sa essere $ds^2 = dx^2 + dy^2$: ma $dy = \frac{r\,dx - x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} + \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = \frac{2r\,dx - x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = \frac{\sqrt{2r-x}\cdot dx}{\sqrt{x}}$; dunque $dy^2 = \frac{2r-x}{x}\cdot dx^2$, e $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{2r-x}{x}\cdot dx^2 = 2r\cdot\frac{dx^2}{x}$ e per conseguenza $ds = \sqrt{2r}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Passando all'integrazione avremo $s = 2\sqrt{2rx}$. Non si aggiunga costante, perchè a DE = x = 0 corrisponde trovare DG = s = 0. Quando x = 2r = DB, si troverà s = 4r = DGA, cioè il perimetro della semicicloide doppio del diametro 2r del circolo generatore

n. 6.4

Trovare la suttangente della Cicloide.

Per la nota formola si avrà $z = y\frac{dx}{dy}$, e sostituendo in luogo di y, e di dy i suoi valori $z = \frac{dx\sqrt{2vx - x^2} + dx\int\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}}{\sqrt{2v-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}}$ $= x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}}\int\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$. Quando $x = 0$, ne risulta $z = 0$, il che significa, che il primo elemento della curva in D è normale a DB. Fatto $x = DB = 2v$, si trova $z = \infty$, e ciò ne insegna, che l'elemento della curva in A è perpendicolare ad AB. Se sia $x = v = DC$, si scoprirà la suttangente $z = v + b$, chiamato b il quadrante DH, e quindi $z = CI$. In questo incontro dunque la curva forma angolo semiretto colla ordinata CI.

Trovare la quadratura della Cicloide.

Chiamata A l'aja DGe della cicloide, egli è noto essere $dA = y\,dx$ $= dx\sqrt{2vx-x^2} + dx\int\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}} = dx\sqrt{2vx-x^2}$ $+ dx\int\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}} + x\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}} - x\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$, ed integrando $A = \int dx\sqrt{2vx-x^2} + x\int\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$ $-\int\frac{vxdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$. La prima sommatoria si agguaglia all'aja DIe, e la seconda al prodotto De . IG. Per avere l'ultima sommatoria, aggiungo e levo il termine $\frac{v.vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$, onde ci si presenti $v.\frac{-xdx}{\sqrt{2vx-x^2}} = v.\frac{vdx - xdx}{\sqrt{2vx-x^2}} - v.\frac{vdx}{\sqrt{2vx-x^2}}$,

ed

ed integrando $\int \frac{r - x\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = r\sqrt{2rx-x^2}$
$- r\int\frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$. Avremo dunque $A = \int dx\sqrt{2rx-x^2}$
$+ \overline{x-r}\int\frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}} + r\sqrt{2rx-x^2}$ = DFe. +
Ce . FG + CD . Fe. Non si è aggiunta costante, perchè A = 0 si riferisce a De = x
= 0. Quando x = DC = r, si troverà
A = DFHC + CD . CH, e si raccoglierà
essere quadrabile l'aja DGFHFD, la
quale si agguaglia al quadrato dal raggio
DC = r. Se x = DB = 2r, scopriremo
A = DFHAD + CA . BA, cioè a dire
uguale a un semicircolo. Si inferisca
agguagliarsi a due semicircoli l'aja
DGIAAHFD.

Trovare il valore della forza
tangenziale nella Cicloide
dedotta dalla gravità.

Sia la Cicloide AGD (fig. 2.) talmente situata, che siano AA orizzontale, e AD verticale. Tagliata De = x, e condotta eG = y, pel punto G si meni la verticale GM = $\frac{p}{M}$ = 1, supponendosi il peso del corpo G uguale alla sua massa; e condotta la tangente GL, sia ML ad essa normale. Si segni ea = dx e si tirino ak parallela ad eG, Gg parallela ad ea. Per la similitudine dei triangoli kGg, MGL avremo
kG : Gg :: MG : GL
$ds : dx :: 1 : \frac{dx}{ds} = GL$:
ma $ds = \sqrt{2r}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$; dunque $GL = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r}}$
$= \frac{\sqrt{2rx}}{2r} = \frac{2\sqrt{2rx}}{4r}$, e poichè $2\sqrt{2rx}$
$= s = GD$, sarà $GL = \frac{s}{4r}$, cioè a
dire

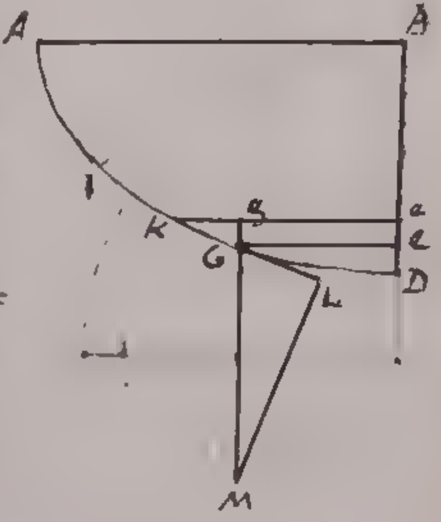


Fig. 2.

dire la forza tangenziale proporzionale allo spazio GD, che resta da scorrersi per giungere al punto infimo della Cicloide.

Trovare il tempo, in cui da un grave obbligato a descrivere la Cicloide si scorre cominciando dalla quiete lo spazio qualunque 7GD.

Sia E lo spazio, per cui un grave discende in un primo secondo, che chiamo R: Ritrovandosi il corpo in G, ed essendo $GL = \frac{s}{4r}$, avremo $2E \cdot -\frac{s\,ds}{4r} = u\,du$, e posto $7GD = S$, ne risulterà integrando $\frac{2E}{4r} \cdot \overline{S^2 - s^2} = u^2$, o sia $\sqrt{\frac{E}{2r}} \cdot \sqrt{S^2 - s^2} = u = -\frac{k\,ds}{dt}$, e quindi $\sqrt{\frac{E}{2r}} \cdot \frac{dt}{k} = \frac{-ds}{\sqrt{S^2 - s^2}}$. Passo nuovamente all'integrazione, e trovo $\sqrt{\frac{E}{2r}} \cdot \frac{t}{k} = \int \frac{-ds}{\sqrt{S^2 - s^2}}$.

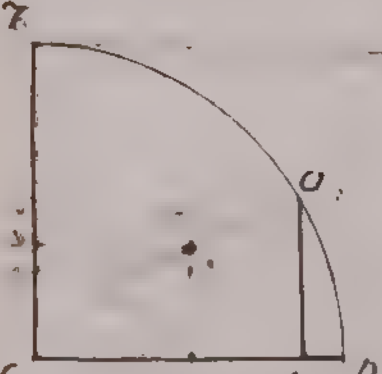


Fig. 3.

Col raggio $C7 = S$ (fig. 3.) descrivo il quadrante 7OP, e quando $s = NO$, sarà $\int \frac{-ds}{\sqrt{S^2 - s^2}} = \frac{7O}{C7}$. Avremo pertanto $t = \sqrt{\frac{2r}{E}} \cdot k \cdot \frac{7O}{C7}$, e quando $s = 0$, ed il corpo è giunto al punto infimo della Cicloide, $t = \sqrt{\frac{2r}{E}} \cdot k \cdot \frac{7OP}{C7}$. Ora chiamato b il quadrante del raggio r, $\frac{b}{r} = \frac{7OP}{C7}$; dunque $t = \sqrt{\frac{2r}{E}} \cdot k \cdot \frac{b}{r} = kb\sqrt{\frac{2}{Er}}$, cioè a dire il tempo sempre costante, qualunque sia il punto 7 (fig. 2.) dal quale comincia a discendere il grave G; proprietà bellissima della Cicloide. Egli è noto essere $\frac{r}{2b}\sqrt{2E} = \sqrt{h}$, dinotando h la lunghezza d'un pendolo a secondi: Avremo dunque $t = \frac{k\sqrt{r}}{\sqrt{h}}$, e $2t = \frac{k\sqrt{4r}}{\sqrt{h}}$, tempo d'una vibrazione del corpo G.

Trovare l'evoluta della Cicloide.

Abbiasi la Cicloide AGD (fig. 4), di cui si cerchi l'evoluta QHD. Il filo AQ, da cui penda il peso Q, si agguagli al perimetro AGD = 4r, e si vada ripiegando lungo la detta Cicloide. Sia esso giunto nella posizione AKGH, e tocchi la Cicloide nel punto G, e tirata l'ordinata Ge = y, a cui si riferisce De = x; chiaro si scopre essere GH = GD = $s = 2\sqrt{2rx}$. Si segni Ee = Gg = dx, gK = dy, onde ne risulta GK = $ds = \sqrt{2r}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$. e si continui la tangente GH sino in I, dimodochè si determini la suttangente eI. Dal punto H si deducano HLO parallela ad IB, e PHT parallela a DC.

Per la similitudine dei triangoli KGg, GHO abbiamo l'analogia

KG : Gg :: GH : HO

$ds : dx :: s : \frac{s\,dx}{ds}$

e perciò $HO = \frac{s\,dx}{ds}$, e sostituendo in vece di s, e di ds i loro valori;

$$HO = \frac{2\sqrt{2rx}\cdot dx}{\sqrt{2r}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}} = 2x,$$

e conseguentemente LH = CT = x. La somiglianza dei triangoli Ggk, IPH ci somministra l'analogia

Gg : gk :: IP : PH

$dx : dy :: IP : IP\cdot\frac{dy}{dx}$,

che mi insegna essere $PH = IP\cdot\frac{dy}{dx}$. Sostituisco in cambio di IP = Ie − Pe, e di

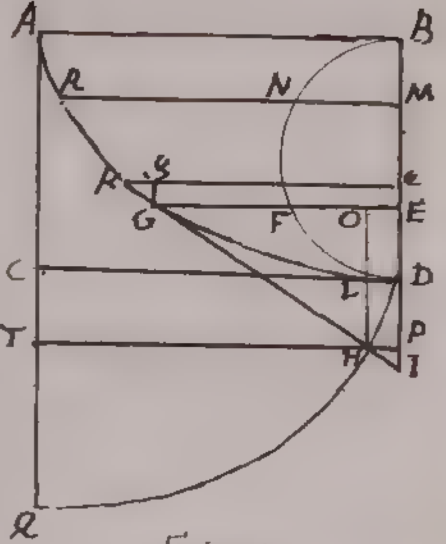


Fig. 4

e di dy i loro valori $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2v-x}}$, $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - x$, $\frac{\sqrt{2v-x}}{\sqrt{x}}\,dx$; e viene $PH = \int\frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}} - \sqrt{2vx-x^2}$: ma $PT = 2b$; dunque $TH = \sqrt{2vx-x^2} + 2b - \int\frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$. Taglio $BM = DQ = x$, e tirata l'ordinata MR, e descritto col diametro $BD = 2v$ il semicircolo $DZNB$, sarà $MN = QZ = \sqrt{2vx-x^2}$, $BN = DZ = \int\frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$, ed $NR = DZN = 2b - BN = 2b - \int\frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$. Per la qual cosa $MR = \sqrt{2vx-x^2} + 2b - \int\frac{v\,dx}{\sqrt{2vx-x^2}}$: ma tale è il valor di TH, dunque sono eguali le due coppie di coordinate BM, MR; QT, TH, e per conseguenza la Cicloide ARD ha per evoluta una Cicloide eguale DHQ; il che ec.

Corollario

Il problema sciolto ci addita il mezzo opportuno per ottenere, che il pendolo AQ descriva la Cicloide QHD, e faccia le sue vibrazioni più o meno dilatate in tempo costante $\frac{k\sqrt{4v}}{\sqrt{h}}$.

svani'vanno

Della Lemniscata, e delle sue Proprietà.

Della Lemniscata, e delle sue Proprietà.

Si chiama Lemniscata la curva (Fig. 1.) ABDB'Ab'dbA dall'equazione $x^2+y^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}$ (1.), nella quale $\pm x$ significa le assisse AP, Ap; $\pm y$ le ordinate PB, pb'; PB', pb; ed AD = a; Ad = −a. Alzo l'equazione al quadrato, ed ho $x^4+2y^2x^2+y^4 = a^2x^2 - a^2y^2$, e perciò $x^4+(2y^2-a^2).x^2+y^4 = -a^2y^2$, e supplendo al quadrato $x^4+(2y^2-a^2).x^2+y^4 - a^2y^2+\frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{4}-2a^2y^2$. Estratta la radice trovo $x^2+y^2-\frac{a^2}{2} = \pm a\sqrt{(\frac{a^2}{4}-2y^2)}$, ovvero $x^2 = \frac{a^2}{2}-y^2 \pm a\sqrt{(\frac{a^2}{4}-2y^2)}$, e nuovamente cavando la radice, $\pm x = \sqrt{(\frac{a^2}{2}-y^2 \pm a\sqrt{(\frac{a^2}{4}-2y^2)})}$ (2.) Col medesimo metodo scopriremo $\pm y = \sqrt{(a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - x^2-\frac{a^2}{2})}$ (3.)

Supposta $\pm x = \pm y$, la formola (1.) mi dà $+x^2+y^2=0$, e per conseguenza $\pm x = \pm y = 0$. Nel punto A dunque sono nulle le coordinate $\pm x$, $\pm y$. E perchè quando queste stanno per isvanire, l'ultima loro ragione è d'egualità, ne segue che condotte pel punto A le rette eAE, e'AE', che formino gli angoli semiretti EAD, e'Ad colla asse dD, toccheranno esse nel punto A i quattro quadranti ABD, abd, Ab'd, AB'D della nostra curva. Aggiungo, che la toccano al di dentro degli angoli retti EAE', eAe'; imperciocchè stabilita minima l'assissa, è $\pm x > \pm y$. E voglia il vero, presa per mano la formola (3.) $\pm y = \sqrt{(a\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+2x^2)} - \frac{a^2}{2}-x^2)}$, osservo essere $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+2x^2)} = \frac{1}{2}a + \frac{2x^2}{a} - \frac{4x^4}{a^3}$. Sostituito questo valore, troveremo $\pm y = \sqrt{(x^2-\frac{4x^4}{a^2})} = \pm x \mp \frac{2x^3}{a^2}$, e perciò $\pm y <$

$< \pm x$, come si doveva dimostrare.

Quando $\pm y = 0$, abbiamo per l'equazione (1.) $x^2 = a\sqrt{x^2} = \pm ax$, e quindi $\pm x = \begin{cases} 0 \\ a \end{cases}$. Il perchè l'ordinata $\pm y$ sarà $= 0$ non solo nel punto A, ma ancora nei punti D, d, in riguardo ai quali $\pm x = a$.

Avverto non poter essere $\pm x > a$. Si fingasi $\pm x = a+b$, e per conseguenza $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Effettuata la sostituzione di un tal valore nella formola (3.) scopriremo $\pm y = \sqrt{a\sqrt{(2a^2+4ab+2b^2+\frac{1}{4}a^2)} - a^2 - 2ab - b^2 - \frac{1}{2}a^2}$. Ora $\sqrt{(2a^2+4ab+2b^2+\frac{1}{4}a^2)} < \frac{3}{2}a + \frac{4ab+2b^2}{3a}$; dunque, surrogato questo valore maggiore del giusto, ne risulta $\pm y = \sqrt{\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{4ab+2b^2}{3} - \frac{3a^2}{2} - 2ab - b^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{-2ab-b^2}{3}\right)}$, cioè a dire $\pm y$ eguale alla radice immaginaria di una quantità negativa: il vero valore della $\sqrt{(2a^2+2ab+2b^2+\frac{1}{4}a^2)}$ avrebbe determinata maggiore la predetta grandezza negativa. Per la qual cosa resta dimostrato, non poter essere $\pm x > a$.

Assegnato a $\pm y$ un dato valore, che sia del numero di quelli, che la posson comportare, la formola (2.) $\pm x = \sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - y^2 \pm a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - 2y^2\right)}\right)}$ ci documenta, che $\pm x$ accetta quattro valori due positivi, e due negativi, i quali a coppia a coppia si eguagliano; onde si abbia AT = At, AV = Av. Corrispondono ad essi otto ordinate uguali, la metà positive, e la metà negative, le quali determinano otto punti della nostra curva.

I due valori di $\pm x$ si eguaglieranno, allora

allora quando sia $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-2y^2\right)}=0$, e quindi $\pm y = a\sqrt{\frac{1}{8}}$. Surrogato questo valore nella formola (2), si scoprirà $\pm x = a\sqrt{\frac{3}{8}}$. Tagliate adunque $AP = Ap = a\sqrt{\frac{3}{8}}$, ed a esse si riferiranno le quattro ordinate PB, PB', pb, pb', ciascuna delle quali si eguaglia ad $a\sqrt{\frac{1}{8}}$; e questa è la massima grandezza, che alle ordinate della Lemniscata possa competere. Ed in fatti se nella formola (2) si stabilirà $\pm y > a\sqrt{\frac{1}{8}}$, ne risulterà negativa la quantità $\frac{a^2}{4}-2y^2$, e perciò immaginaria la $\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-2y^2\right)}$, che rende immaginario il valore di $\pm x$.

Cercare col metodo dei Massimi, e dei Minimi, se nella Lemniscata vi sono massime o minime ordinate, ed assisse

Prese le differenze nell'equazione (1.), scopriremo $2x\,dx + 2y\,dy = \frac{ax\,dx - ay\,dy}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$ (4.)
Vediamo se le ordinate y ha massimi valori. Dalla $dy=0$, mi si presenta $2=\frac{a}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$, e per conseguenza $4x^2-4y^2=a^2$, ovvero $x^2=y^2+\frac{a^2}{4}$. Sostituito cotal valore nella formola (1.), ne nasce $2y^2+\frac{a^2}{4}=a\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}\right)}$, o sia $y^2=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{8}=\frac{a^2}{8}$, e quindi $y=\frac{\pm a}{\sqrt{8}}$
Un tal valore determina quello di $x=\pm a\sqrt{\frac{3}{8}}$, e perciò le massime ordinate sono quattro, due positive PB, pb', ed altrettante negative PB', pb: Di sopra ho provato, che queste ordinate sono le maggiori, che possano competere alla curva, di cui trattiamo, ad

ci ora ho fatto vedere, che ad esse si appropria la prerogativa di massime; perchè $dy = 0$ rispettivamente a dx. Quindi addiviene, che condotte le rette Bb', $B'b$, toccano queste la curva nei punti B, b'; B', b.

Se qualcuno col mezzo del metodo dei Massimi, e dei Minimi volesse trovare la massima assissa x, caderebbe facilmente in paralogismo; imperciocchè quantunque dx sia minima relativamente a dy, non può dirsi altrettanto di $x\,dx$ paragonata con $y\,dy$, e perciò la prima quantità non può trascurarsi messa al confronto colla seconda nella formola (4) $2x\,dx + 2y\,dy = \frac{ax\,dx - ay\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Per procedere sicuramente, si converta questa formola nell'analogia
$$\pm dx : \mp dy :: \pm 2y \pm \frac{ay}{\sqrt{(x^2-y^2}} : \pm 2x \mp \frac{ax}{\sqrt{(x^2-y^2}}$$
Ora ponendo $y=0$, $x=\pm a$, si trova
$\pm dx : \mp dy :: 0 : \pm a$, e per conseguenza dx nulla in riguardo a dy. Questo è l'unico caso in cui $\pm x$ è massima; perchè in tutte l'altre circostanze dx a dy sta in ragion, o finita, o maggior di qualunque data, il che succede quando $\pm y$ è massima. Condotte pei punti D, d due normali all'asse Dd, toccano esse la nostra curva nei detti punti D, d.

Condurre la Tangente alla Lemniscata.

Al punto qualunque B (fig. 4.) della Lemniscata $ABCD$ si intenda condotta la tangente BS', e come è noto avremo

fa

la suttangente $SP = \frac{y\,dx}{dy}$: ma per l'equazione differenziale (4) della nostra curva $\frac{2y\sqrt{(x^2-y^2)}+ay}{-2x\sqrt{(x^2-y^2)}+ax} = \frac{dx}{dy}$; dunque $SP = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{2y^2\sqrt{(x^2-y^2)}+ay^2}{-2x\sqrt{(x^2-y^2)}+ax}$. e poichè $\sqrt{(x^2-y^2)} = \frac{x^2+y^2}{a}$, scopriremo $SP = \frac{2y^2x^2+2y^4+a^2y^2}{-2x^3-2xy^2+a^2x} = \frac{(x^2+y^2+\frac{a^2}{2})\cdot 2y^2}{-(x^2+y^2-\frac{a^2}{2})\cdot 2x}$

Dalla formola (3.) si raccoglie $y^2 = a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - x^2 - \frac{a^2}{2}$, dunque $x^2+y^2+\frac{a^2}{2} = a\sqrt{(2x^2+\frac{a^2}{4})}$, $x^2+y^2-\frac{a^2}{2} = -a^2+a\sqrt{(2x^2+\frac{a^2}{4})}$. Effettuate queste sostituzioni, ci si presenterà

$$SP = \frac{a\sqrt{(2x^2+\frac{a^2}{4})}\cdot\left(2a\sqrt{(2x^2+\frac{a^2}{4})}-2x^2-a^2\right)}{\left(a^2-a\sqrt{(2x^2+\frac{a^2}{4})}\right)\cdot 2x}$$

$$= \frac{4a^2x^2+\frac{a^4}{2}-(2ax^2+a^3)\cdot\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)}}{2a^2x-2ax\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)}} \quad (5)$$

Per la qual cosa assegnato un valore ad $AP = x$, ed essendo per conseguenza noto il punto B, si renderà palese la misura della suttangente PS, e la retta SB toccherà la curva nel punto B.

Sia minima l'assissa $AP = x$, ed in tal ipotesi sarà $\sqrt{(\frac{a^2}{4}+2x^2)} = \frac{a}{2}+\frac{2x^2}{a}$. Sostituito questo valore, scopriremo, fatti i necessarj computi $SP = \frac{a^2x^2-ax^4}{a^2x-4x^3} = x$, e quando nel punto A $x = 0$, $SP = 0$. La stessa verità si poteva dedurre dalla formola $SP = \frac{y\,dx}{dy}$; imperciocchè essendo nel punto A $dx = dy$, ed $y = 0$, ne risulta $SP = 0$.

Posto che XPB si agguagli alla massima ordinata, abbiamo $AP = x = a\sqrt{\frac{3}{8}}$ e fatta la sostituzione di un tal valore si trova dovere.

Troverà $SP = \dfrac{\frac{3a^4}{4}}{2a^3\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot 0} = \dfrac{a\sqrt{\frac{3}{8}}}{0}$. Che SP in tal circostanza si agguagli all'infinito, ed lo mostra apertamente la formola $\frac{y\,dx}{dy} = SP$, essendo nel nostro caso $dy = 0$ in riguardo a dx. Ho di sopra fatta la riflessione, che quando è massima l'ordinata PB, la tangente SB è parallela all'asse AD, e quindi ne nasce dover essere infinita la suttangente SP.

Se nel punto D $x = a$, ne proverrà $SD = 0$. La stessa conseguenza si deduce dalla formola $\frac{y\,dx}{dy} = SD$, in cui nell'ipotesi, che si considera, è $y = 0$ cioè $dx = 0$ rispettivamente a dy. Ho di sopra fatta la riflessione, che la tangente del punto D è normale ad AD. Da ciò ne nasce, che coincidendo i punti P, D, la suttangente PS, ovvero DS deve uguagliarsi a nulla.

Determinare il valore delle coordinate AP, PB, quando la suttangente PS (fig. 5) si agguaglia all'ordinata PB.

Questo problema mi fu proposto da un mio stimatissimo Amico il Sig. Ab. Giuseppe Contarelli, ed ecco come io lo sciolgo.

Avendo la suttangente PS una direzione contraria a quella della fig. 4, e dovendo essere $= y$, si deve notare col segno negativo. Il perché avremo $\dfrac{2y^2\sqrt{(x^2-y^2)} + ay^2}{-2x\sqrt{(x^2-y^2)} + ax} = -y = SP$. Si faccia la divisione per y, la quale indica esser $y = 0$ una radice della

dalla nostra equazione. Ed in fatti nei punti A, D abbiamo $DS = \pm y = 0$. Ne risulterà pertanto $2y\sqrt{(x^2-y^2)} + ay = 2x\sqrt{(x^2-y^2)} - ax$; ~~[illegible]~~ per la formola ~~[illegible]~~, e perciò $a\cdot(x+y) = (2x-2y)\cdot\sqrt{(x^2-y^2)}$. Divido per $\sqrt{(x+y)}$, e mi si presenta $a\sqrt{(x+y)} = (2x-2y)\sqrt{(x-y)}$. La divisione per $\sqrt{(x+y)}$ mi dà la radice $x+y=0$; che determina il punto A. Moltiplico la scoperta equazione per $\sqrt{(x-y)}$, e trovo $a\sqrt{(x^2-y^2)} = 2(x^2-2xy+y^2)$: ma per la formola (1.) $a\sqrt{(x^2-y^2)} = x^2+y^2$; dunque $x^2+y^2 = 2x^2-4xy+2y^2$, e quindi $x^2-4xy+y^2=0$, ossia $x^2-4xy+4y^2 = 3y^2$, ed estraendo la radice $x-2y = y\sqrt{3}$, e finalmente $x = (2+\sqrt{3})\,y$. (6.)

Per facilitare il computo pongo $2+\sqrt{3} = n$, e surrogando invece di y il suo valore somministrato dalla equazione (3), trovo $x = n\sqrt{\left(a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - x^2 - \frac{a^2}{2}\right)}$, e per conseguenza $x^2 = n^2a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - n^2x^2 - \frac{n^2a^2}{2}$, ovvero $(n^2+1)\cdot x^2 + \frac{n^2a^2}{2} = n^2a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)}$. Elevo al quadrato, e scopro $(n^2+1)^2\cdot x^4 + (n^4+n^2)\cdot a^2x^2 + \frac{n^4a^4}{4} = 2n^4a^2x^2 + \frac{n^4a^4}{4}$. Cancellato il termine $\frac{n^4a^4}{4}$ comune da ambe le parti, e per la stessa ragione anche $n^4a^2x^2$, e fatta la divisione per x^2, ne deriva $(n^2+1)^2\cdot x^2 (-n^4+n^2)\cdot a^2 = 0$, e per ultimo $x = \pm\frac{na\sqrt{(n^2-1)}}{n^2+1}$, e surrogando si cambia in il suo valore, $x = \pm a\frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{(6+4\sqrt{3})}}{8+4\sqrt{3}}$ -

n. 80

$= \pm \frac{a\sqrt{(5+4\sqrt{3})}}{4}$. (7.) Conseguentemente avremo per la formola (6) $y = \pm \frac{a\sqrt{(5+4\sqrt{3})}}{4\cdot(2+\sqrt{3})}$ (a)

La divisione, che si è fatta per x^2, ci istruisce essere $\pm x = o$ una radice della nostra equazione, la quale appartiene al punto A: in cui $DS = AD = DB = o$ (Fig. 4.)

Indagare se la Lemniscata ha flessi contrarj

Nell'equazione (4.) differenziale della nostra curva $2x dx + 2y dy = \pm \frac{ax dx - ay dy}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$, ovvero $(2x dx + 2y dy)\cdot\sqrt{(x^2-y^2)} = ax dx - ay dy$ prendo la seconda differenza, assumendo costante dx, e trovo $(2dx^2 + 2dy^2 + 2y ddy)\sqrt{(x^2-y^2)} + (2x dx + 2y dy)\cdot\left(\frac{x dx - y dy}{\sqrt{(x^2-y^2)}}\right) = a dx^2 - a dy^2 - ay ddy$. Nel punto del flesso contrario è $ddy = o$, e perciò moltiplicando per $\sqrt{(x^2-y^2)}$ troveremo $4x^2 dx^2 + 2x^2 dy^2 - 2y^2 dx^2 - 4y^2 dy^2 = (a dx^2 - a dy^2)\cdot\sqrt{(x^2-y^2)}$. Ma per l'equazione (4) $(ay + 2y\sqrt{(x^2-y^2)})\cdot dy = ax dx - 2x dx\sqrt{(x^2-y^2)}$, dunque $\frac{ax dx - 2x dx\sqrt{(x^2-y^2)}}{ay + 2y\sqrt{(x^2-y^2)}} = dy$, e quindi $\frac{(ax - 2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2}{(ay+2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2}\cdot dx^2 = dy^2$. Sostituito tal valore di dy^2, e dividendo per dx^2, ho

$$4x^2 - 2y^2 + (2x^2 - 4y^2)\cdot\frac{(ax - 2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2}{(ay+2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2} = a\sqrt{(x^2-y^2)} - a\sqrt{(x^2-y^2)}\cdot\frac{(ax - 2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2}{(ay + 2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2}.$$

Ridotte a compimento si troverà

$$(4x^2-2y^2)\cdot(ay+2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2 + (2x^2-4y^2)\cdot(ax-2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}\cdot(ay+2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2 - a\sqrt{(x^2-y^2)}\cdot(ax-2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2. \quad (9)$$

Questa equazione non può avverarsi, se non quando $x = y = o$, e quindi (Fig. 1.) nel

nel punto A. ci saranno due flessi contrarj OAo, O'Ao'. In tutti gli altri incontri l'equazione non si verifica, e perciò non si danno altri flessi contrarj. Osservo, che quando x, y non sono amendue $=0$, esser deve $x^2 > y^2$; perchè altrimenti $\sqrt{(x^2-y^2)}$ sarebbe immaginaria. Per far vedere, che nella detta spazio l'equazione non regge, egli è di uopo provare $4x^2-2y^2 > a\sqrt{(x^2-y^2)}$, $2x^2-4y^2 > -a\sqrt{(x^2-y^2)}$: ma per l'equazione (1.) $x^2+y^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}$; dunque $4x^2-2y^2 > x^2+y^2$, $2x^2-4y^2 > -x^2-y^2$. E primieramente se $4x^2-2y^2 > x^2+y^2$, sarà $3x^2 > 3y^2$, il che è manifesto. In secondo luogo se $2x^2-4y^2 > -x^2-y^2$, sarà altresì come sopra $3x^2 > 3y^2$. Si avverta, che il comun moltiplicatore $(ay+2y\sqrt{(x^2-y^2)})^2$ della quantità $4x^2-2y^2$; $a\sqrt{(x^2-y^2)}$ può essere $=0$, quando nei punti D, d $\pm y=0$, $\pm x=a$: ma anche in tal caso si ha $(2x^2-4y^2)\cdot(ax-2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2 > -a\sqrt{(x^2-y^2)}\cdot(ax-2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2$, essendo $(ax-2x\sqrt{(x^2-y^2)})^2 = a^4$ quantità positiva.

Trovare il Raggio osculatore della Lemniscata.

Chiamo r il Raggio osculatore della nostra curva. Presa costante dx, egli è noto essere $r = \dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$ (10.) Dalla formola differenzio-differenziale della Lemniscata si raccoglie

$$\frac{(2dx^2+2dy^2)\cdot\sqrt{(x^2-y^2)} + (2xdx+2ydy)\cdot\dfrac{(xdx-ydy)}{\sqrt{(x^2-y^2)}} - adx^2 + ady^2}{2y\sqrt{(x^2-y^2)}+ay}$$

$= -ddy$. Moltiplico per $\sqrt{(x^2-y^2)}$, e ridotto il computo, trovo.

$$\frac{4x^2dx^2 - 2y^2dx^2 + 2x^2dy^2 - 4y^2dy^2 + (ady^2 - adx^2)\sqrt{(x^2-y^2)}}{2y\cdot(x^2-y^2) + ay\sqrt{(x^2-y^2)}}$$
$= -ddy$. E poiché $a\sqrt{(x^2-y^2)} = x^2+y^2$, ne risulterà fatta la sostituzione
$$\frac{(3x^2-3y^2)\cdot(dx^2+dy^2)}{3x^2y-y^3} = -ddy.$$ Sostituisco questo valore nella formola del raggio osculatore, ed ho $v = \frac{(3x^2y-y^3)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{(3x^2-3y^2)\cdot dx}$

Ora per la formola (4)
$dy = \frac{(ax - 2x\sqrt{(x^2-y^2)})\cdot dx}{ay + 2y\sqrt{(x^2-y^2)}}$, e per conseguenza
$$dy^2 = \frac{(a^2x^2 - 4ax^2\sqrt{(x^2-y^2)} + 4x^4 - 4x^2y^2)\cdot dx^2}{a^2y^2 + 4ay^2\sqrt{(x^2-y^2)} + 4x^2y^2 - 4y^4}$$
e ponendo x^2+y^2 in luogo di $a\sqrt{(x^2-y^2)}$,
$dy^2 = \frac{(a^2x^2 - 4x^2y^2)\,dx^2}{a^2y^2 + 4x^2y^2}$; e quindi dopo le convenienti osservazioni $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}\cdot adx}{y\sqrt{(a^2+4x^2)}}$. Effettuata la sostituzione di un tal valore, mi si presenta
$v = \frac{(3x^2-y^2)\cdot a\sqrt{(x^2+y^2)}}{(3x^2-3y^2)\cdot\sqrt{(a^2+4x^2)}}$. In vece di y^2 sostituisco il suo valore $a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - x^2 - \frac{a^2}{2}$ suggerito dalla formola (3), e scopro
$$v = \frac{\left(4x^2+\frac{a^2}{2} - a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)}\right)\cdot a\sqrt{\left(a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} - \frac{a^2}{2}\right)}}{\left(6x^2+\frac{3a^2}{2} - 3a\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)}\right)\sqrt{(a^2+4x^2)}} \cdot (11.)$$

Abbiamo veduto, che nel punto A (fig. 1.) è $-ddy = 0$ a cagione dei flessi contrarj: avremo dunque per la formola (10.) $v = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy} = \infty$. La stessa verità si deduce anche dalla formola (11.), supponendo x minima per evitare gli equivoci, e fatta la riflessione essere $\sqrt{(2x^2+\frac{1}{4}a^2)} = \frac{1}{2}a + \frac{2x^2}{a}$, $\sqrt{(a^2+4x^2)} = a + \frac{4x^2}{a}$

Fatti gli opportuni calcoli scopriremo

$$v = \frac{a^2 x^2 \cdot (\sqrt{2} - \frac{1}{2})}{a \colon o} = \infty .$$

Nel punto B, a cui corrisponda la massima ordinata $PB = y = \frac{a}{\sqrt{8}}$, è l'ascissa $AP = x = a\sqrt{\frac{1}{8}}$, sarà $v = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

In riguardo al punto D nel quale $AD = x = a$, ne proverrà ~~$v = a(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2})$~~ $v = \frac{a}{3}$, e questo il minimo valore di v, il che si può dimostrare così. Segna l'archetto (fig. 1.) $DZ = dy$, e l'ascissa ad esso relativa sarà $x = a - dx$, onde si abbia $x^2 = a^2 - 2adx$. Nella formula (11) sostituisco un tal valore in luogo di x^2, e ne risulta $v = (4a^2 + \frac{a^2}{2} - 8adx - a\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} - 4adx) \cdot a \cdot (\sqrt{a}\sqrt{(2a^2 + \frac{a^2}{4} - 4adx)} - \frac{a^2}{2}) :$ $(6a^2 + \frac{3a^2}{2} - 12adx - 3a\sqrt{(2a^2 + \frac{a^2}{4} - 4adx)}) \cdot \sqrt{(a^2 + 8a^2 - 16adx)}$. Ora $\sqrt{(2a^2 + \frac{a^2}{4} - 4adx)} = \frac{3a}{2} - \frac{4dx}{3}$, $\sqrt{(9a^2 - 16adx)} = 3a - \frac{8dx}{3}$. Surrogati questi valori, ed espurgata la formola si troverà

$$v = \frac{(3a^2 - 4adx) \cdot a\sqrt{(a^2 - \frac{4adx}{3})}}{(3a^2 - 8adx) \cdot (3a - \frac{8dx}{3})}.$$

In cambio di $\sqrt{(a^2 - \frac{4adx}{3})}$ pongo il suo valore $a - \frac{2dx}{3}$; ed effettuate le moltipliche indicate, mi si presenta

$$v = \frac{3a^4 - 6a^3 dx}{9a^3 - 32a^2 dx} = \frac{3a^2 - 6adx}{9a - 32dx} = \frac{a}{3} + \frac{14dx}{27}$$

che rispettivamente al punto Z, che dista da D per dy quantità infinitesima del primo grado, il raggio osculatore non cresce salvochè per una grandezza proporzionale a dx, ch'

che essendo AD massima assissa, è nulla relativamente a dy. Per la qual cosa è minimo nel punto D il raggio osculatore $r = \frac{a}{3}$.

Passare dall'equazione all'asse Dd (Fig. 1.) della Lemniscata a quella al foco A.

Fatta AK = z, abbiamo $z^2 = x^2 + y^2$ (12.): ma per la formola (.) $x^2+y^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}$; dunque $z^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}$ (13.) Differenzio la formola (12.), (13.), e trovo $zdz = xdx + ydy$ (14.), $2zdz = \frac{axdx - aydy}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$, e perchè $\sqrt{(x^2-y^2)} = \frac{z^2}{a}$, ne proviene $2z^3dz = a^2xdx - a^2ydy$ (15.) Tiro AC, che formi con AK un angolo infinitesimo, e col raggio AK descrivo l'archetto KG = du, onde si determini GC = dz. Riesce agevole l'intendere $dx^2 + dy^2 - dz^2 = du^2$ (16.). La formola (14.) ci dà $zdz - xdx = ydy$, $\frac{z^2dz^2 - 2zdzxdx + x^2dx^2}{y^2} = dy^2$. Pongo questi valori nelle formole (15.), e (16.), e mi si presenta $2z^3dz = 2a^2xdx - a^2zdz$, o sia $2z^3dz + a^2zdz = 2a^2xdx$ (17.), $\frac{y^2dx^2 + z^2dz^2 - 2zdzxdx + x^2dx^2}{y^2} - dz^2 = du^2$, e sostituendo z^2 in cambio di y^2+x^2, $\frac{z^2dx^2 + z^2dz^2 - 2zdzxdx - y^2dz^2}{y^2} = du^2$ (18.). In questa formola pongo il valore di xdx, e di dx suggeriti dalla formola (17.), e scopro

$$\left(\frac{4z^6 + 4a^2z^4 + a^4z^2}{4a^4x^2y^2} - \frac{2z^2}{a^2y^2}\right) \cdot z^2dz^2 - dz^2 = du^2 \text{ (19.)}.$$

Ora per la formola (13.) $z^4 = a^2x^2 - a^2y^2$, e perciò $\frac{z^4 + a^2y^2}{a^2} = x^2$. Metto questi valori nella

nella formola (12.) e (19.), ed ho primiera-
mente $\frac{z^4+2a^2y^2}{a^2} = z^2$, e quindi $\frac{a^2z^2-z^4}{2a^2}$
$= y^2$ (20.). Trovo in secondo luogo
$\left(\frac{4z^6+4a^2z^4+a^4z^2}{(4a^2y^2)\cdot(z^4+a^2y^2)} - \frac{2z^2}{a^2y^2}\right)\cdot z^2dz^2 - dz^2 = du^2$ (21.).
Finalmente, fatta la sostituzione di y^2 per
la formola (20.), scopro
$\left(\frac{4z^6+4a^2z^4+a^4z^2}{(2a^2z^2-2z^4)\cdot\left(\frac{z^4+a^2z^2}{2}\right)} - \frac{2z^2}{\frac{a^2z^2-z^4}{2}}\right)\cdot z^2dz^2 - dz^2 = du^2$,
e quindi $\left(\frac{4z^4+4a^2z^2+a^4}{(a^2-z^2)\cdot(a^2+z^2)} - \frac{3z^2-a^2}{a^2-z^2}\right) dz^2 = du^2$,
e riducando alla stessa, ed espurgando
la formola $\frac{z^4dz^2}{a^4-z^4} = du^2$, e cavata la
radice $\frac{\pm z^2dz}{\sqrt{(a^4-z^4)}} = du$ (22) equazione della
Lemniscata al foco A.

Costruzione della Lemniscata.

Per costruire la Lemniscata con eleganza, col raggio AD = a descrivi il circolo
DI'dID. Condotta AE, che faccia con AD
l'angolo semiretto EAD, abbiamo veduto
ch'essa tocca la nostra curva nel punto A.
Continuo la retta AB in F; la retta AC in
H, e posto l'arco EF = q, sarà FH = dq.
La similitudine dei settori ABG, AFH
mi somministra l'analogia
AB : BG :: AF : FH
z : du :: a : dq, da cui si deduce
$du = \frac{z\,dq}{a}$ (23.). Sostituito questo valore
nell'equazione della curva al foco A,
prende il seguente aspetto $\frac{\pm a\,z\,dz}{\sqrt{(a^4-z^4)}} = dq$ (24.)
Pongo $z^2 = a\,t$ (25.) e dopo le necessarie opera-
zioni

zioni scopro $\frac{\pm\frac{1}{2}a\,dt}{\sqrt{(a^2-t^2)}} = dg$, ed integrando $\pm\frac{1}{2}$ Arco Raggio a Seno $t = \pm\frac{1}{2}$ A.° R.° a S. $\frac{z^2}{a} = g$. Non aggiungo costante, perchè nel punto A deve $AB = z = 0$, e parimente $EF = g = 0$. Mi servirò unicamente del segno +, bastando questo solo a descrivere l'intera curva.

Col parametro $= a$ descrivo la parabola conica (fig. 2.) MAKbm all'asse KAN, qualmente richiede la formola (25.) $z^2 = at$, ed all'assissa $KA = t$ corrisponderanno le due ordinate $AB = z$, $Ab = -z$. Si delinei ora (fig. 3.) un circolo col raggio $AE = a$, e nell'AD normale ad AE tagliata $AK = t$; e tirata KL parallela ad AE, sarà $AK = t$ il seno dell'arco EL. Alla metà di questo $= EF$ si segni eguale l'arco EF nella fig. 1., e condotta la retta FAf, e fatta $AB = z$, $Ab = -z$ uguali alle linee notate colle stesse lettere nella fig. 2., i punti B, b, ed altri infiniti in simil guisa determinati apparterranno alla Lemniscata AAD A'Ab'd bA, che mi sono proposto di costruire.

Nella parabola MAKbm. (fig. 2.) le assisse $KA = t$ non possono divenir negative, e perciò il seno $AK = t$ (fig. 3.) esser dee sempre mai positivo. Sono dunque esclusi tutti gli archi, che cominciando da E terminano nel semicircolo E'DE, e per questa ragione dentro gli angoli retti (fig. 1.) E'Ae, eAE non ci è curva. Gli archi (fig. 2.) EL. Ω

ELDED'EL

ELDE'D'EL, che differiscono per l'intera circonferenza, aprono la strada a scoprire i punti analoghi B, b nei due rami della Lemniscata, e le loro metà (fig. 1.) EF, EFDIef, che differiscono per un semicircolo, servono a determinarli, di modo che con tal mezzo si descrivono i due rami AADB'A, Abdb'A della curva. Tagliata (fig. 2.) KN = a, e tirata la doppia ordinata mM, il solo pezzo di parabola MKm ha luogo nella costruzione; perché il seno KA = 1 non può essere maggiore di KN = a raggio del circolo. Per la qual cosa chiaramente si vede (fig. 2. e 1.), che i massimi valori di AB = z, Ab = −z sono (fig. 1.) AD = a, Ad = −a. I due punti analoghi B, b si vanno sempre più accostando al punto A, quanto l'arco EF è più piccolo; e divenendo esso = 0, i predetti punti coincidono col punto A; e la curva è toccata in A dalla retta EAe. Quando l'arco EF = q diviene uguale al semiquadrante ED, i punti B, b giungono al massimo discostamento dal punto A, e si sovrappongono ai punti D, d. Crescendo il nominato arco, i predetti punti si avvicinano al punto A, e finalmente ad esso nuovamente pervengono, qualora EF = q si eguaglia al quadrante EDE', e la curva è toccata dalla retta E'Ae'.

Determinare la rettificazione della Lemniscata.

Sia la curva (fig. 1.) AOA = s, e perciò $AC = ds = \sqrt{(dz^2 + du^2)}$. E poiché per l'equazione della nostra curva $du^2 = \frac{z^4 dz^2}{a^4 - z^4}$, fatta la sostituzione di questo valore, avremo

$ds =$

$$ds = \sqrt{\left(dz^2 + \frac{z^4dz^2}{a^4-z^4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^4dz^2}{a^4-z^4}\right)} = \frac{a^2dz}{\sqrt{(a^4-z^4)}},$$

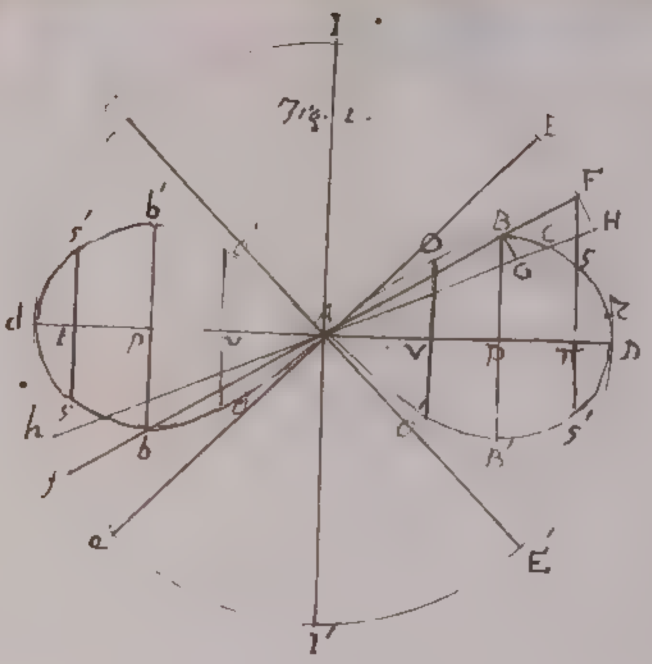
e finalmente $s = \int \frac{a^2dz}{\sqrt{(a^4-z^4)}}$ (23). Veggasi ciò che scrive intorno l'integrazione di questa formola l'Ab. Vincenzo Riccati mio fratello, nel Tomo II. degli Opuscoli pag. 120, e seguenti, il quale dimostra, ch'essa dipenda dalla rettificazione dell'ellissa, e dell'iperbola equilatera.

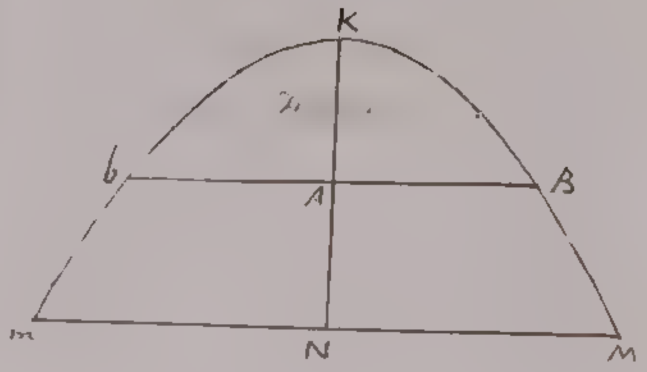
Determinare la quadratura della Lemniscata.

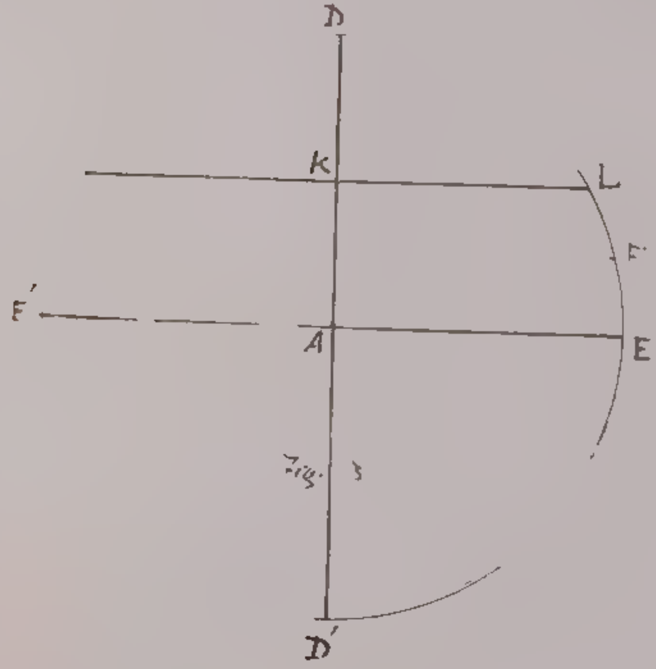
Abbiamo l'aja $AOBA = \int \frac{z\,du}{2} = \int \frac{z^3dz}{2\sqrt{(a^4-z^4)}} = B - \frac{1}{4}\sqrt{(a^4-z^4)}$: ma quando $z = 0$, $\sqrt{(a^4-z^4)} = a^2$, e l'aja $AOBA = 0$; dunque $B = \frac{1}{4}a^2$, e quindi $AOBA = \frac{a^2 - \sqrt{(a^4-z^4)}}{4}$ (24). Il perchè $AOADA = \frac{a^2}{4}$, e l'aja intera della Lemniscata $= a^2$.

Determinare l'equazione della Lemniscata all'asse AE (Fig. 61.)

Pongo $AM = p$, $MB = q$, e condotte MQ, BP normali, e BN parallela ad AD, ritrovo essere $AQ = QM = \frac{p}{\sqrt{2}}$, $MN = NB = QP = \frac{q}{\sqrt{2}}$. Avremo pertanto $AP = x = \frac{p+q}{\sqrt{2}}$, $PB = y = \frac{p-q}{\sqrt{2}}$. Il perchè $x^2 = \frac{p^2+2pq+q^2}{2}$, $y^2 = \frac{p^2-2pq+q^2}{2}$. Nella formola (1) $x^2+y^2 = a\sqrt{(x^2-y^2)}$ sostituisco in cambio di x^2, y^2 i sovrascritti valori, e trovo $p^2+q^2 = a\sqrt{(2pq)}$ (25), equazione della Lemniscata all'asse AE. Trascuro le conseguenze, che si possono dedurre da questa formola, avendo bastantemente esaminata la nostra curva.







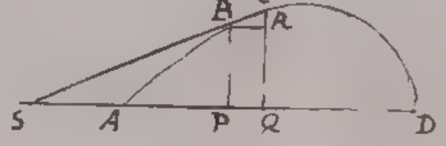


Fig. 4.

Fig. 5.

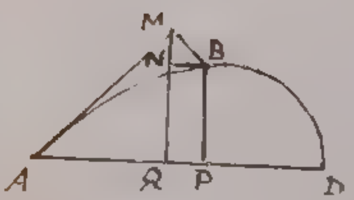


Fig 5.

Problema.

Determinare la curva ADD, al cui punto qualunque D condotta la tangente AD, e a questa dal punto dato C la normale CH, sia essa normale sempre eguale al raggio osculatore del punto D. 88

Problema

Determinare la curva AID, al cui punto qualunque D condotta la tangente KD, ed a questa dal punto dato C la normale CH, sia essa normale sempre eguale al raggio osculatore del punto D.

Sia AQI la curva, di cui ~~si cerca~~ la quella curva, che si cerca; AID sia l'evoluta, e l'evoluzione principj nel punto A, per cui, e per il punto C dato si tiri la retta KL, che tagli la tangente DK nel punto K. Per la natura delle evolute se la retta ID toccherà ~~toccherà~~ la curva AQI nel punto I, e sia eguale all'arco AQI, il punto D apparterrà alla curva da determinarsi AID, ed ID sarà il raggio osculatore del punto D. Ma la linea CH perpendicolare alla toccante KD, e perciò parallela al raggio osculatore ID dobbe essere allo stesso eguale; dunque sarà HD = CI, e l'angolo CID retto. Quindi la curva AQI avrà la proprietà, che condotta dal punto dato C la linea CI formerà colla tangente ID angolo retto. Si prolunghi la detta tangente sin a tanto che tagli nel punto L la linea KL, e dal punto I si tiri IG normale a KL. Se sia CG = s, GI = q, sarà la ~~sut~~tangente GL $= -\frac{q\,ds}{dq}$, ed essendo retto l'angolo CIL, avremo l'analogia CG : GI :: GI : GL

$$s : q :: q : -\frac{q\,ds}{dq},$$

e dall'analogia l'equazione $q\,dq = -s\,ds$, che integrata mi dà $q^2 = a^2 - s^2$, equazione al circolo del raggio a. La curva AQI pertanto è un circolo, il cui raggio CA, e la sua evoluta è la curva AID, che ci siamo posti a determinare. Se adunque la tangente DI si farà eguale all'arco

all'arco circolare AQT, il punto D sarà nella nuova curvata ATD.

Andiamo primieramente in traccia della equazione all'asse AL. Tirata DB normale ad AL, sia $CB = x$; $BD = y$, e conseguentemente $CD = \sqrt{x^2+y^2}$, $TD = CH = \sqrt{x^2+y^2-a^2}$, $BK = -\frac{y\,dx}{dy}$. Per la similitudine dei triangoli KDB, KCH abbiamo $KD : DB :: KC : CH$

$$\sqrt{\frac{y^2dx^2}{dy^2}+y^2} : y :: -\frac{y\,dx}{dy}+x : \sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

analogia, che mi dà l'equazione

$$\frac{-y\,dx+x\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \sqrt{x^2+y^2-a^2}.$$

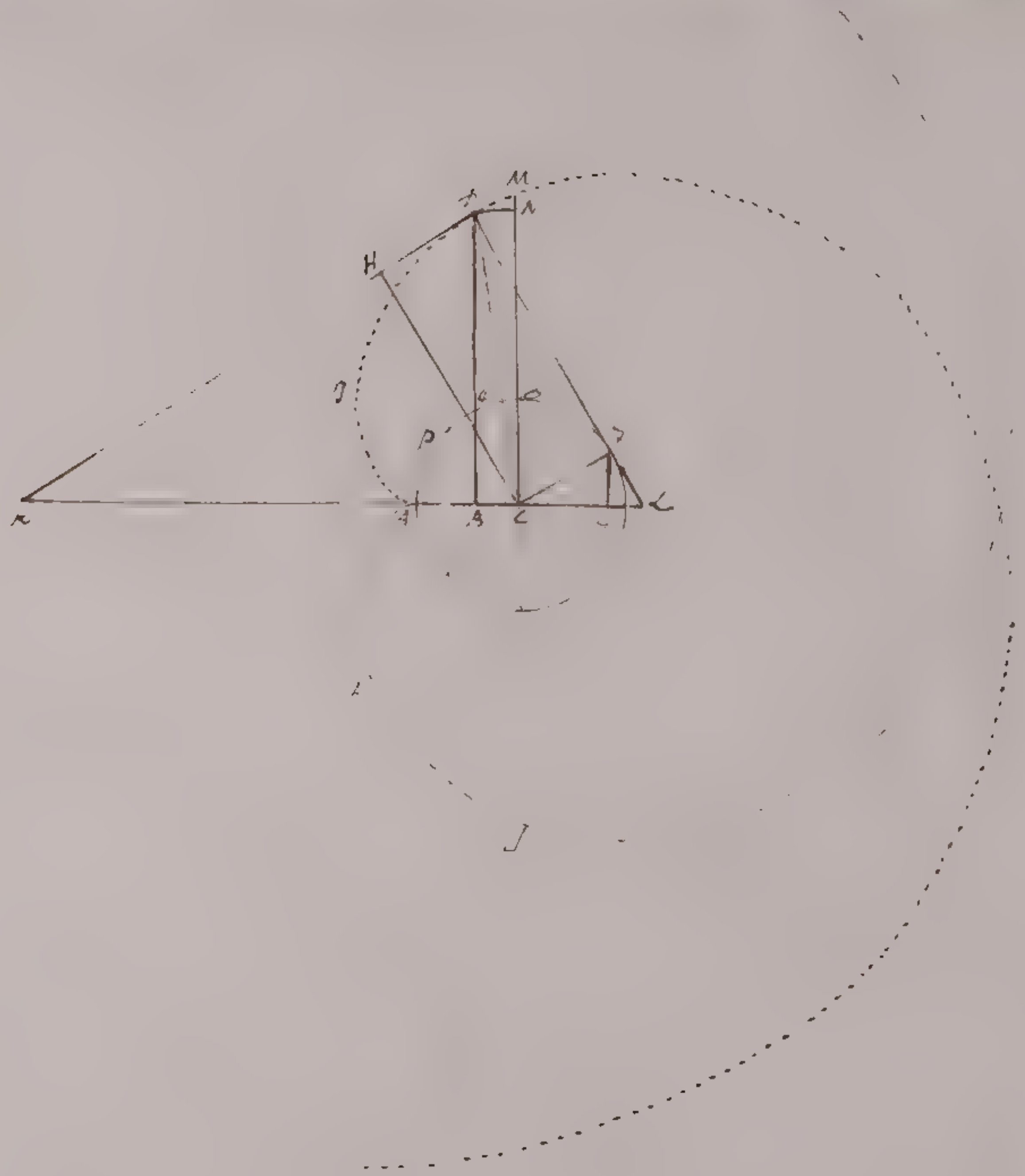
Posta $dx=0$, si trova $x = \sqrt{x^2+y^2-a^2}$ ed $y = \pm a$. Ad $y = a$ corrispondono infiniti massimi valori di x, e sono (chiamato q il quadrante del circolo AQT) q, $5q$, $9q$, $13q$, $17q$ &c. Ad $y = -a$ corrispondono poi i valori minimi di x $-3q$, $-7q$, $-11q$, $-15q$, $-19q$ &c; e tutto ciò succede nel ramo inscritto al di sopra. Tutto a rovescio nel ramo inferiore i valori massimi di x q, $5q$ &c si riferiscono ad $y = -a$, ed i valori $-3q$, $-7q$ &c ad $y = a$.

Posta $dy = 0$, ne risulta $x = \pm a$. Nel ramo superiore ad $x = a$ convengono il massimo, ed i massimi valori di y 0, $-4q$, $-8q$, $-12q$ &c e ad $x = -a$ i valori negativi di y $2q$, $6q$, $10q$; il contrario nel ramo inferiore ad $x = a$ corrispondono i valori positivi della y 0, $4q$, $8q$, $12q$ &c, e ad $x = -a$ i valori negativi $-2q$, $-6q$, $-10q$ &c.

Cerchiamo ora l'equazione della nostra curva ATD riferita al suo centro C. Segnata una minima porzione di curva DM, tiro la linea CM, e fatto centro in C, col raggio CD

descritto

descriverà l'archetto DN. Sia CD = t, NM = dy, DN = ds, e ne risulterà [illegible] = $\sqrt{t^2-a^2}$.
La similitudine de' triangoli CHQ, DNM [illegible]
ci somministra [illegible] analogismo
CH : HQ :: [illegible]
$\sqrt{t^2-a^2}$: a :: [illegible] e perciò [illegible]
l'equazione $dy\sqrt{t^2-a^2}$ [illegible]. Facciasi
CH = [illegible] $\sqrt{t^2-a^2}$ [illegible], onde si abbia
dt = [illegible]; ma $t = \sqrt{a^2+s^2}$; dunque
$dt = \frac{s\,ds}{\sqrt{a^2+s^2}}$, e [illegible]. Dunque
l'archetto [illegible] dz, e però
avremo CQ : QC :: CC : DN
[illegible]
e perciò [illegible] $\sqrt{a^2+s^2}$. Sostituendo
in esso valore il valore [illegible]
cioè [illegible] = dz. Ma [illegible] = $ds - \frac{a^2 ds}{a^2+s^2}$.
dunque $ds - \frac{a^2 ds}{a^2+s^2} = dz$, e conseguentemente $ds = dz + \frac{a^2 ds}{a^2+s^2}$, ed integrando
$s = z + \int \frac{a^2 ds}{a^2+s^2}$. Ora s = AD, z = ABC
$\int \frac{a^2 ds}{a^2+s^2}$ = ECD; dunque DO = ABCD.
proprietà da cui dipende la costruzione
della nostra curva [illegible].


M
H
B
C
L

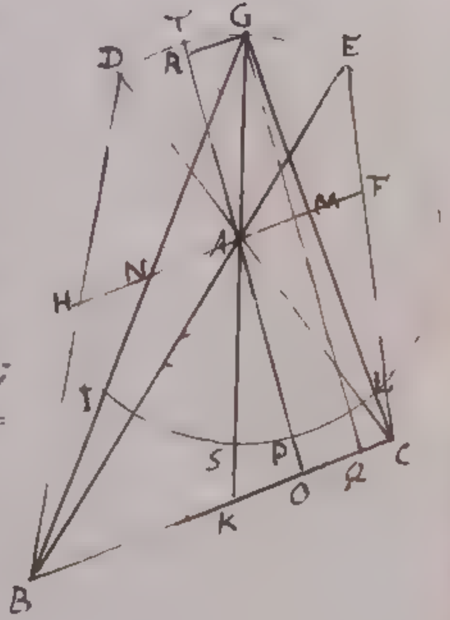
Problema

Dato un circolo, ed una retta fuori di esso
determinare in esso un tal punto, a
cui condotte due linee dalla
retta data taglino esse due
porzioni uguali di circo-
lo

Problema

Dato il circolo, il cui centro A, e la linea BC di grandezza, e di posizione, determinare in esso circolo il punto G, a cui condotte le rette BG, CG, taglino due porzioni eguali di circolo GDI, GEL.

I. Fra le Lettere di Uomini Illustri del secolo XVII. a Giannantonio Rocca Filosofo, e Matematico Reggiano stampate nel Tomo XXXII. del Giornale di Modena, si contiene la LXXXII. del P. Antonio Santini Gesuita, nella quale pretende di dare la soluzione del presente Problema. La costruisce egli nella seguente maniera. Si conducano pel centro A del circolo sino alla periferia le tre linee BAE, CAD, e dalle note BD, CE, si tiri per A la retta HAF parallela a BC, e si divida BC in K come è tagliata HF in A, e poscia per K, e per A si tiri la KG, che termini nel circolo; sarà il punto G quello che si cerca, dimodochè descritte le linee BG, CG, le porzioni di circolo GDI, GEL saranno eguali.



II. Alla costruzione succede la Dimostrazione. Poichè BC è tagliata in K come HF in A, e per il parallelismo MN è tagliata nello stesso punto A come BC in K; sarà CK ad AM, come CG a GM, e BK ad AN, come BG a GN, e permutando sarà CK a AK, come CG a BG, ovvero AM ad AN come GM a GN. Il perchè per gli elementi di Euclide nel triangolo BGC la base BC sarà divisa nella ragione dei lati GC, GB, e l'angolo CGB verrà tagliato per metà dalla linea GK.

Gli

Gli archi adunque SK, SI sono eguali, e sottraendoli dai semicircoli SLEG, SIDG, rimangono gli archi eguali LEG, IDG; il che &c.

Questo modo di argomentare è fallace, e perciò con ragione rispose il Rocca al P. Santini, che il Problema non era ben dimostrato, come vedesi nella Lettera LXXXIV. Ed in fatti dalle due analogie

CK : AM :: CG : GM

AK : AN :: BG : GN, non si può dedurre legittimamente la terza

CK : BK :: CG : BG.

III. Ma se è imperfetta la dimostrazione, deve riputarsi tale anche la costruzione. Vediamo quali conseguenze da essa si cavino: Essendo dati di grandezza, e di posizione il circolo, e la retta BC, se dal centro A si tiri AO normale a BC, saranno date le linee BO, CO, AO. Pongo adunque BO = a, CO = b, AO = c, ed il raggio AD = r. Agevolmente si scopre essere $AC = \sqrt{\overline{CO}^2 + \overline{AO}^2} = \sqrt{(b^2+c^2)}$, e per conseguenza $DC = r + \sqrt{(b^2+c^2)}$. Similmente $AB = \sqrt{(\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2)} = \sqrt{(a^2+c^2)}$, e quindi $EB = r + \sqrt{(a^2+c^2)}$. Dalla similitudine dei triangoli DCB, DAH ne nasce l'analogia

$$DC : CB :: DA : AH$$

$$r+\sqrt{(b^2+c^2)} : a+b :: r : \frac{r.(a+b)}{r+\sqrt{(b^2+c^2)}}$$

e la similitudine dei triangoli ECB, EFA mi somministra quest'altra

$$EB : BC :: EA : AF$$

$$r+\sqrt{(a^2+c^2)} : a+b :: r : \frac{r.(a+b)}{r+\sqrt{(a^2+c^2)}}$$

Si raccoglie perciò $AH = \frac{r.(a+b)}{r+\sqrt{(b^2+c^2)}}$, $AF = \frac{r.(a+b)}{r+\sqrt{(a^2+c^2)}}$.

Sia K il punto, da cui conducendo pel centro A la retta KAG si determini nella circonferenza circolare il punto G, che a parer del P. Santini sciolga il Problema, e si ponga $KO = x$, onde si abbia $AK = a - x$, $CK = b + x$. Dovendo stare

$AK : CK :: AH : AF$, ossia

$$a - x : b + x :: \frac{v.(a+b)}{v+\sqrt{(b^2+c^2)}} : \frac{v.(a+b)}{v+\sqrt{(a^2+c^2)}}$$

$$a - x : b + x :: v+\sqrt{(a^2+c^2)} : v+\sqrt{(b^2+c^2)}$$

ne proviene l'equazione $(b+x).(v+\sqrt{(a^2+c^2)}) = (a-x).(v+\sqrt{(b^2+c^2)})$, da cui si deduce

$$x = \frac{a.(v+\sqrt{(b^2+c^2)}) - b.(v+\sqrt{(a^2+c^2)})}{2v+\sqrt{(a^2+c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2)}} \quad (1.)$$

Se fosse $CO = b = o$, si avrebbe

$$x = \frac{a.(v+c)}{2v+c+\sqrt{(a^2+c^2)}}$$, e ponendo $a = 3$, $c = 4$

$v = 3$, ne proverrebbe $x = \frac{7}{5}$

La sovrascritta formola non è giusta, perchè non si accorda con quella, che si deduce dalla vera soluzion del Problema, che da me si maneggia nel modo che segue.

IV. Dal punto G tiro prima GQ normale a AC, e poscia GR normale ad OAR. Ritenuta la stabilita denominazione, e fatta la riflessione essere $AK = \sqrt{(\overline{OA}^2 + \overline{OK}^2)} = \sqrt{(c^2+x^2)}$; avremo per la simiglianza dei triangoli AKO, AGR le due analogie

$AK : KO :: AG : GR$

$$\sqrt{(c^2+x^2)} : x :: v : \frac{vx}{\sqrt{(c^2+x^2)}} = GR = OQ,$$

$AK : AO :: AG : AR$

$$\sqrt{(c^2+x^2)} : c :: v : \frac{vc}{\sqrt{(c^2+x^2)}} = AR;$$

Per la qual cosa sarà $OR = OA + AR = QG$

=

$= c + \frac{rc}{\sqrt{(c^2+x^2)}}$, $QC = OC - OQ = b - \frac{rx}{\sqrt{(c^2+x^2)}}$,

$BQ = BO + OQ = a + \frac{rx}{\sqrt{(c^2+x^2)}}$; $CG = \sqrt{(\overline{QG}^2 + \overline{QC}^2)}$

$= \sqrt{(c^2 + \frac{2rc^2}{\sqrt{(c^2+x^2)}} + \frac{r^2c^2}{c^2+x^2} + b^2 - \frac{2rbx}{\sqrt{(c^2+x^2)}} + \frac{r^2x^2}{c^2+x^2}} =$

$c^2 + b^2 + r^2 + 2r.\frac{(c^2 - bx)}{\sqrt{(c^2+x^2)}}$, $BG = \sqrt{(\overline{QG}^2 + \overline{BQ}^2)}$

$= \sqrt{(c^2 + \frac{2rc^2}{\sqrt{(c^2+x^2)}} + \frac{r^2c^2}{c^2+x^2} + a^2 + \frac{2rax}{\sqrt{(c^2+x^2)}} + \frac{r^2x^2}{r^2+x^2}} =$

$\sqrt{(c^2 + a^2 + r^2 + 2r\frac{(c^2+ax)}{\sqrt{(c^2+x^2)}})}$.

La soluzione del Problema richiede che sia $AK : CK :: BG : CG$, e quindi analiticamente $a+x : b+x ::$

$\sqrt{(c^2+a^2+r^2+2r\frac{(c^2+ax)}{\sqrt{(c^2+x^2)}})} : \sqrt{(c^2+b^2+r^2+2r\frac{(c^2-bx)}{\sqrt{(c^2+x^2)}})}$ (a)

V. Se fosse giusta la soluzione del P. Santini, ammesso il valore di x da essa determinato, dovrebbe verificarsi la stabilita analogia. Per far toccare con mano lo sbaglio del suddetto Padre, basta dimostrare, che la analogia non si avvera in un caso particolare. Sia dunque, come sopra, $a = 3$, $c = 2$, $r = 3$, $b = 0$, $x = \frac{7}{5}$, e l'analogia prenderebbe l'aspetto

$\frac{46}{5} : \frac{7}{5} :: \sqrt{(34 + \frac{6.(20+\frac{1}{5})}{\sqrt{(13\frac{24}{25})}})} : \sqrt{(25 + \frac{90}{\sqrt{(13\frac{24}{25})}})} ::$

$\sqrt{(34 + \frac{606}{\sqrt{(425)}})} : \sqrt{(25 + \frac{460}{\sqrt{(425)}})}$. Ella è patente la falsità di tal analogia; perchè il primo, ed il secondo termine si corrispondono in proporzione razionale, il terzo, ed il quarto in proporzione assimetra, che con un comun divisore non può manifestarsi razionale.

Che non sia giusta la soluzione del P. Santini, si può ancora provare in qualch' altro modo. Giacchè $\frac{46}{5} : \frac{7}{5} :: \sqrt{(34 + \frac{666}{\sqrt{425}})} . \sqrt{(25 + \frac{440}{\sqrt{425}})}$

sarà

sarà parimente $8 : 7 :: \sqrt{(34\cdot\sqrt{425} + 600)} \cdot \sqrt{(25\cdot\sqrt{425} + 460)}$, ed alzando al quadrato, $64 : 49 :: 34\cdot\sqrt{425} + 600 : 25\sqrt{425} + 460$, e passando all'equazione,

$64\cdot 25\cdot\sqrt{425} + 460\cdot 64 = 49\cdot 34\sqrt{425} + 49\cdot 600$, e per conseguenza ridotto il computo $171 = 11\sqrt{425}$, e tornando ad elevare al quadrato, $29241 = 51425$. La falsità dell'equazione apertamente dimostra non potersi ammettere la soluzione del P. Santini

VI. Ripiglio per mano l'analogia generale, e giacchè $a - x : b + x ::$

$$\sqrt{\left(c^2 + a^2 + v^2 + 2v\cdot\left(\frac{c^2 + ax}{\sqrt{(c^2 + x^2)}}\right)\right)} : \sqrt{\left(c^2 + b^2 + v^2 + 2v\left(\frac{c^2 - bx}{\sqrt{(c^2 + x^2)}}\right)\right)} \ (2.),$$

avrò altresì $a - x : b + x ::$

$$\sqrt{\left((c^2 + a^2 + v^2)\sqrt{(c^2 + x^2)} + 2v\cdot(c^2 + ax)\right)} : \sqrt{\left((c^2 + b^2 + v^2)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)} + 2v\cdot(c^2 - bx)\right)},$$

ed alzando al quadrato, $a^2 - 2ax + x^2 : b^2 + 2bx + x^2 :: (c^2 + a^2 + v^2)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)} + 2v\cdot(c^2 + ax) : (c^2 + b^2 + v^2)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)} + 2v\cdot(c^2 - bx)$, e facendo transito all'equazione,

$$(a^2 - 2ax + x^2)\cdot(c^2 + b^2 + v^2)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)} + (a^2 - 2ax + x^2)\cdot 2v\cdot(c^2 - bx) =$$
$$(b^2 + 2bx + x^2)\cdot(c^2 + a^2 + v^2)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)} + (b^2 + 2bx + x^2)\cdot 2v\cdot(c^2 + ax).$$

Sarà conseguentemente

$$\left((a^2 - 2ax + x^2)\cdot(c^2 + b^2 + v^2) - (b^2 + 2bx + x^2)\cdot(c^2 + a^2 + v^2)\right)\cdot\sqrt{(c^2 + x^2)}$$
$$= (b^2 + 2bx + x^2)\cdot(2vc^2 + 2vax) - (a^2 - 2ax + x^2)\cdot(2vc^2 - 2vbx) \ (3.)$$

Comincierò dal trattare i casi più semplici, per far scudi passaggio ai più composti.

VII. Sia $AO = c = 0$, dimodochè la data linea AC passi pel centro A del circolo. L'analogia (2.) si trasforma così $a - x : b + x :: \sqrt{(a^2 + v^2 \pm 2va)} : \sqrt{(b^2 + v^2 \mp 2vb)} :: a \pm v : b \mp v$. Ho anteposti a $2va$ i segni $\pm$, a $2vb$ i segni $\mp$; perchè $\sqrt{(c^2 + x^2)} = \sqrt{x^2}$ nella presente ipotesi si eguaglia a $\pm x$. Se $a - x : b + x :: a + v : b - v$, avremo parimente $a + b : b + x :: a + b : b - v$, e perciò

$x = -v$, che se $a-x : b+x :: a-v : b+v$, scopriremo altresì $a+b : b+x :: a+b : b+v$, e quindi $x = v$. Stabilita (fig. 2) $AG = v = x$, sarà $BG = a-x = a-v$, e $CG = b+x = b+v$, e ne risulterà l'analogia $a-x : b+x :: a-v : b+v$. Fatta inoltre $AG' = -v = x$, avremo $BG' = a-x = a+v$, e $CG' = b+x = b-v$, e scopriremo l'analogia $a-x : b+x :: a+v : b-v$. Le linee dunque BG, CG, ovvero BG', CG' tagliano porzioni eguali di cerchio, cioè due semicircoli $G*G'$, GPG' qualmente richiede la soluzion del Problema.

Nell'ipotesi di (fig. 1.) di $AO = c = o$, l'equazione (3) è divisibile per x, e conseguente ci si presenta una terza radice $x = o$. L'analogia (2.) si trasforma così $a : b :: \sqrt{(a^2+v^2 \pm 2av.\frac{o}{o})} : \sqrt{(b^2+v^2 \mp 2bv.\frac{o}{o})}$ dalla quale nulla si può raccogliere. Fa di uopo pertanto sciogliere in altro modo il Problema nella circostanza di $x = o$.

VIII. Sia G (fig. 3.) il punto nel circolo, il cui centro A, ed il raggio $AG = v$, a cui dai punti estremi B, C della linea data BC condotte le rette BG, CG, ~~che si continuino sinché~~ tagliano porzioni eguali di circolo GDI, GEL. Si meni GQ normale a BE, ed essendo come sopra $AB = a$, $AC = b$, si faccia $CQ = z$. Abbiamo $\overline{AQ}^2 = (AC-CQ)^2 = (b-z)^2 = b^2-2bz+z^2$: ma $\overline{GQ}^2 = \overline{AG}^2 - \overline{AQ}^2$; dunque $\overline{GQ}^2 = v^2-b^2+2bz-z^2$. E poichè $\overline{CG}^2 = \overline{GQ}^2 + \overline{CQ}^2 = v^2-b^2+2bz-z^2+z^2$, ne risulta $CG = \sqrt{(v^2-b^2+2bz)}$: Inoltre $\overline{BG}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{GQ}^2 = (a+b-z)^2+v^2-b^2+2bz-z^2 = a^2+2ab-2az+v^2$, e perciò $BG = \sqrt{(a^2+2ab-2az+v^2)}$. Dovendo

stare

stare AB : AC :: BG : CG, avremo analiticamente $a : b :: \sqrt{(a^2+2ab-2az+v^2)} : \sqrt{(v^2-b^2+2bz)}$, e perciò

$a^2 : b^2 :: a^2+2ab-2az+v^2 : v^2-b^2+2bz$

e sottraendo il secondo termine dal primo, il quarto dal terzo,

$a^2-b^2 : b^2 :: a^2+2ab+b^2-2az-2bz : v^2-b^2+2bz$

Il primo, ed il terzo termine sono divisibili per $a+b$, e quindi ne proviene

$a-b : b^2 :: a+b-2z : v^2-b^2+2bz$, per conseguenza l'equazione $av^2-ab^2+2abz-bv^2+b^3-2b^2z = ab^2+b^3-2b^2z$, che espurgata si riduce alla seguente $(a-b)\cdot v^2 = 2ab\cdot(b-z)$, da cui ne deriva l'analogia

$\frac{2ab}{v} : v :: a-b : b-z$. Nella EK normale a AE si segnino $EK = \frac{2ab}{v}$, $KF = a-b$, e tirata la diagonale AK, ed a questa la parallela FQ, avremo KE : EA :: KF : AQ o analiticamente $\frac{2ab}{v} : v :: a-b : b-z$ e quindi sarà $AQ = AC - CQ = b-z$, e perciò $CQ = z$. Condotta QG normale a AE, si determinerà il punto G, a cui dirette le linee AG, CG, taglieranno le porzioni eguali di circolo GDI, GHL.

Si inferisca, che le tre radici, che servono all'ipotesi di $c=0$, sono $x = \pm v$, $x = 0$.

IX. Passo a considerare il caso (fig. 1.) di $AO = a = CO = b$. In tal incontro menata OAT normale a AC, egli è certo che il punto G cade in T, e che sendo eguali le diagonali AG, CG, si avvera l'analogia AG : CG :: AO : CO. Se il punto G cade in T, anche il punto K coincide col punto O, e perciò $OK = x = 0$. Nell'analogia (2)

posta

rosta $OK = x = o$, prende la stessa il se=
guente aspetto alzandola al quadrato
$a^2 : b^2 :: c^2 + a^2 + v^2 \pm 2vc : c^2 + b^2 + v^2 \pm 2vc$,
e alternando, $a^2 : a^2 + c^2 \pm 2vc + v^2 :: b^2 : b^2 + c^2 \pm 2vc + v^2$, e sottraendo il primo termine dal secondo, il terzo dal quarto
$a^2 : c^2 \pm 2vc + v^2 :: b^2 : c^2 \pm 2vc + v^2$. Ma il secondo ed il quarto termine sono eguali; dunque debbano esser tali anche il primo ed il terzo, onde si abbia $a^2 = b^2$, e per conseguenza $a = b$.

Che se $a = b$, esser dee necessariamente $OK = x = o$: l'analogia (a) ~~[illegible]~~ in tal ipotesi si trasforma così
$a - x : a + x :: \sqrt{\left(c^2 + a^2 + v^2 + \frac{2v(c^2 + ax)}{\sqrt{(c^2 + x^2)}}\right)} : \sqrt{\left(c^2 + a^2 + v^2 + \frac{2v(c^2 - ax)}{\sqrt{(c^2 + x^2)}}\right)}$. Se x fosse quantità positiva, ne seguirebbe l'assurdo, che il primo termine ~~fosse~~ sarebbe minore del secondo, ed il terzo maggiore del quarto. Il contrario succederebbe fingendo x quantità negativa. Egli è dunque necessario, che sia $x = o$, onde ne risulti la giusta analogia
$a : a :: \sqrt{(c^2 + a^2 + v^2 \pm 2vc)} : \sqrt{(c^2 + a^2 + v^2 \pm 2vc)}$.

Avverto che la retta OG (fig. 4) normale a AC, che passa pel centro A del circolo, e che nel nostro caso divide per metà la data AC, determina oltre il punto G ancora il G'; dimodochè non solo le linee AG, CG, ma ancora le AG', CG' tagliano gli archi eguali, quelle GIL, GLL, e queste G'I'I', G'L'L'. Conviene al punto G l'analogia
$a : a :: \sqrt{(a^2 + (c+v)^2)} : \sqrt{(a^2 + (c+v)^2)}$,
ed al punto G' l'analogia
$a : a :: \sqrt{(a^2 + (c-v)^2)} : \sqrt{(a^2 + (c-v)^2)}$.

X. La semplice ipotesi di $b = o$, $a = c = v$ mi somministra il terzo caso, che prendo a maneggiare. Dalla formola (β) deduremo in tal circostanza
$((a^2 - 2ax + x^2) \cdot 2a^2 - x^2 \cdot 3a^2) \cdot \sqrt{(a^2 + x^2)} =$
$2a^3x^2 + 2a^2x^3 - 2a^5 + 4a^4x - 2a^3x^2$, ed espurgando l'equazione, e dividendola per a^2,
$(2a^2 - 4ax - x^2) \cdot \sqrt{(a^2 + x^2)} = -2a^3 + 4a^2x + 2x^3$,
ed elevando al quadrato, ed effettuando la indicata moltiplica

$4a^6$

$4a^6 - 16a^5x + 16a^4x^2 - 8a^3x^3 + 13a^2x^4 + 8ax^5 + x^6 =$
$4a^6 - 16a^5x + 16a^4x^2 - 8a^3x^3 + 16a^2x^4 \qquad + 4x^6$.
Cancello i termini comuni ad ambi i membri dell'equazione, e fatta la divisione per x^4, mi si presenta $8ax = 3a^2 + 3x^2$; ossia $x^2 - \frac{8ax}{3} = -a^2$, e supplendo al quadrato, $x^2 - \frac{8ax}{3} + \frac{16a^2x^2}{9} = \frac{7a^2}{9}$, ed estratta la radice, $\frac{4a}{3} - x = \pm \frac{a}{3}\sqrt{7}$; e finalmente
$x = \frac{4a}{3} - \frac{a}{3}\sqrt{7}$, $x = \frac{4a}{3} + \frac{a}{3}\sqrt{7}$.

La formola dedotta dalla soluzione del P. Santini $x = \frac{a\cdot(v+\sqrt{(b^2+c^2)}) - b\cdot(v+\sqrt{(a^2+c^2)})}{2v+\sqrt{(a^2+c^2)}+\sqrt{(b^2+c^2)}}$ nell'ipotesi di $b=0$, $a=v=c$ prende il seguente aspetto $x = \frac{2a}{3+\sqrt{2}}$, ed è differentissima da quella, ch'è stata da me scoperta, e dimostrata.

Costruzione della prima formola $x = \frac{4a}{3} - \frac{a}{3}\sqrt{7}$

XI. Le condizioni del Problema richiedono, che dato il circolo $GLOG'G$, il cui raggio $AO = a$, e la retta $OB = a$, si cerchi il punto K, da cui pel centro A condotta la linea KG, e poscia le due linee BG, OG, gli archi $GI'I$, GDO siano eguali. A ciò serve la radice $x = \frac{4a}{3} - \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Si meni AE' parallela ad OB, e tagliata $AC = \frac{4a}{3}$, fatto centro in C, col raggio CA si descriva il circolo $AKDK'D'A$. Prolungata OB verso K', e condotto il diametro $DFCD'$ parallelo ad OA, sarà $DF = \frac{1}{3}a$, e perciò $FD' = \frac{7}{3}a$, e l'ordinata $FK = \frac{1}{3}a\sqrt{7}$, onde rimanga $OK = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a\sqrt{7} = x$. Pei punti K, A da linea KAG, che tagli il cerchio $GLOG'G$ nel punto G. Descritte BG, OG, saranno eguali i segmenti di circolo $GI'I$, GDO.

1/14

Costruzione dalla seconda formola $x = \frac{4a}{3} + \frac{a}{3}\sqrt{7}$.

Dalla prima costruzione si deduce $OK' = \frac{4a}{3} + \frac{a}{3}\sqrt{7}$. Congiunti i punti K', A colla retta K'A, taglierà questa il circolo GLOG'G nel punto G', e menate poscia dai punti A, O pel punto G' le linee AG'I, OG', saranno eguali i segmenti di circolo G'HI, G'IO. . . . .

XII. Essendosi fatta la divisione per x^4, abbiamo la terza radice $x = 0$. A questa serve il punto O, a cui condotte le rette $AO = a$, $OO = 0$, tagliano due archi ambi uguali a nulla, siccome quelle che toccano il circolo GLOG'G nel punto O.

Questo numero va trasportato a suo luogo.

XVI. Riesce elegante la soluzione del Problema nelle ipotesi di $b = 0$, $a = c = r$, ovvero di $b = 0$, $c = r$, ed a maggiore, o minore di c; perchè a cagione di liberare la formola dai radicali, essendo pervenuta l'analisi ad un'equazione del sesto grado, si elidono i termini costanti, e quelli che sono moltiplicati per x, x^2, x^3, e resta soltanto $6ax^5 = 3a^2x^4 + 3x^6$, e fatta la divisione per x^4, $6ax = 3a^2 + 3x^2$, equazione del secondo grado. Vediamo cosa succede ponendo $b = 0$, $a = r$, e c maggiore o minore di r. La sovra posta formola generale (3) si riduce alla seguente.

nel primo caso, e nel secondo $4ac^2x^5 = 3a^2c^2x^4 + (4c^2 - a^2) \cdot x^6$, e fatta &c. $4ac^2x = 3a^2c^2 + (4c^2 - a^2) \cdot x^2$, equazione &c.

$\left((a^2 - 2ax + x^2) \cdot (c^2 + a^2) - x^2 \cdot (c^2 + a^2)\right) \cdot \sqrt{(c^2 + x^2)} = 2ac^2x^3 + 2a^2x^3 - 2ac^2 \cdot (a^2 - 2ax + x^2)$, e facendo le indicate moltipliche,

$(a^4 + a^2c^2 - 2a^3x - 2ac^2x - a^2x^2) \cdot \sqrt{(c^2 + x^2)} = -2a^3c + 4a^2c^2x + 2a^2x^3$, e dividendo per a,

a^3

$(a^3+ac^2-2a^2x-2c^2x-ax^2).\sqrt{(c^2+x^2)} =$
$-2ac^2+4ac^2x+2ax^3$. Alzo al quadrato, ed eseguite le convenienti operazioni, trovo

$$\left.\begin{array}{l} a^6c^2-4a^5c^2x+a^6x^2-4a^5x^3+2a^4x^4+4a^3x^5+a^2x^6 \\ 2a^4c^4-4a^3c^4x+4a^4c^2x^2-4a^3c^2x^3+2a^2c^2x^4+4a^2cx^5 \\ a^2c^6-4ac^6x+2a^2c^4x^2 \qquad +4c^4x^4 \\ \qquad 4c^6x^2 \end{array}\right\} =$$

$4a^4c^4-16a^3c^4x+16a^2c^4x^2-16a^3c^2x^3+16a^2c^2x^4+4a^2x^6$,
la qual formola si riduce alla sottoscritta

$$\left.\begin{array}{l} a^6c^2-4a^5c^2x+a^6x^2-4a^5x^3+2a^4x^4+4a^3x^5-3a^2x^6 \\ -2a^4c^4+16a^3c^4x+4a^4c^2x^2+4a^3c^2x^3-9a^2c^2x^4+4a^2cx^5 \\ +a^2c^6-4ac^6x-9a^2c^4x^2 \qquad +4c^4x^4 \\ \qquad +4c^6x^2 \end{array}\right\}$$

$= 0$ non fornita dalla proprietà, che in essa svaniscano il termine costante, e quelli, che sono moltiplicati per x, x^2, x^3. Lo stesso accade nelle ipotesi più composte, quando b non è uguale a nulla, e ad a, v, c si assegnano valori diseguali. ~~Il Problema dunque appartiene al sesto grado generalmente; nè può sciogliersi col circolo, e colla linea retta, senon in alcuni casi particolari [illegible]~~

~~[illegible] Il Problema, che abbiamo per le mani, serve propriamente la formola (?) del terzo grado, che ammette generalmente tre soluzioni di secondo e di terzo grado, a cagione di liberarsi la formola dal radicale $\sqrt{(c^2+x^2)}$; ma le radici, che si aggiungono, non competono al nostro Problema.~~

XIIV. Non tralascio d'avvertire, che ancora quando $b=0$, $c=v$, ed a maggiore o minore di c, e di v, svaniscono insieme col termine costante quelli, che sono moltiplicati

plicati per x, x^2, x^3. La formola (3.) si trasforma così

$$((a^2-2ax+x^2).2c^2-x^2.(a^2+2c^2)).\sqrt{(c^2+x^2)}=$$
$$x^2.(2c^3+2acx)+(a^2-2ax+x^2).-2c^3.$$

Espurgandola, e dividendola per a ne nasce

$$(2ac^2-4c^2x-ax^2).\sqrt{(c^2+x^2)}=-2ac^3+4c^3x+2cx^3.$$

Elato al quadrato, e fatte le debite operazioni, rimarrà

$$-3a^2c^2x^4+16ac^2x^5+(a^2-4c^2).x^6=0$$

e dividendo per x^4

$$-3a^2c^2+16ac^2x+(a^2-4c^2).x^2=0.$$

Avremo dunque $x^2-\frac{16ac^2x}{4c^2-a^2}=\frac{-3a^2c^2}{4c^2-a^2}$

e supplendo al quadrato, ed estratta la radice $x-\frac{4ac^2}{4c^2-a^2}=\frac{\pm ac}{4c^2-a^2}\sqrt{(4c^2+3a^2)}$, e finalmente $x=\frac{4ac^2}{4c^2-a^2}\pm\frac{ac}{4c^2-a^2}\sqrt{(4c^2+3a^2)}$.

Questa equazione si cangia nell'analogia $\frac{4c^2-a^2}{a} : 4c\pm\sqrt{(4c^2+3a^2)} :: c : x$, che mi somministra le due seguenti costruzioni

Costruzioni della formola

$$x=\frac{4ac^2}{4c^2-a^2}\mp\frac{ac\sqrt{(4c^2+3a^2)}}{4c^2-a^2}$$

XIV. Al raggio $AO=c$ (fig. 61.) del circolo $OLGG'O$ si conduca la normale OD', in cui si seghi $OB=a$; $OC=4c$, $CD=CD'=\sqrt{(4c^2+3a^2)}$, onde ne risulti $OD=4c-\sqrt{(4c^2+3a^2)}$, $OD'=4c+\sqrt{(4c^2+3a^2)}$. Continuata OA verso E, si tagli $OE=\frac{4c^2-a^2}{a}$, e si menino le diagonali ED, ED', alle quali sieno parallele AK, AK', e prolunghino la prima sino in G, accaderà che le rette OG, AG; OG', AG' taglino gli archi $OLG=IHG$, $OIG'=G'HI$.

XVI. La divisione, che si è fatta per x^4, somministra la terza radice $x = 0$. Veggasi quello che ho scritto al num.^{ro} XII.

XVII Ammettasi l'unica condizione di $r = c$, ed avremo la formola (3)

$$((a^2-2ax+x^2)\cdot(2c^2+b^2)+(b^2+2bx+x^2)\cdot(-2c^2-a^2))\cdot\sqrt{(c^2+x^2)}$$
$$=(b^2+2bx+x^2)\cdot(2c^3+2cax)+(a^2-2ax+x^2)\cdot(-2c^3+2cbx),$$

che si riduce così

$$(2a^2c^2-2b^2c^2-4ac^2x-2ab^2x-4bc^2x-2a^2bx+b^2x^2-a^2x^2)\cdot\sqrt{(c^2+x^2)}$$
$$=-2a^2c^3+2b^2c^3+2ab^2cx+2a^2bcx+4ac^3x+2acx^3+2bcx^3$$

Alzandola al quadrato, svanisce il termine costante, e restano quelli moltiplicati per x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6. Fatta la divisione per x, che dà $x = 0$, ci si presenta un equazione del quinto grado fornita di tutti i suoi termini, due sole radici della quale servono al Problema, ma che io non ho la maniera di scegliere.

XVIII. Lo stesso dicasi dell'equazione generale ascendente al sesto grado formata anch'essa con tutti i suoi termini, da cui io non so dedurre le tre radici, che danno soluzione al Problema. Per la qual cosa quel Problema, che il P. Santini ha creduto di sciogliere col circolo, e colla linea retta, è assai più difficile di quello che ha pensato, e tale che richiede l'industria dei Geometri più provetti.

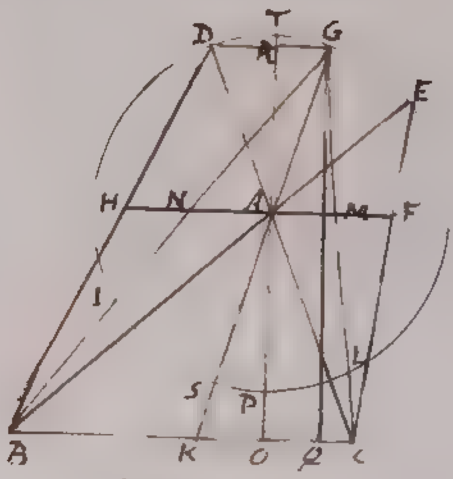


Fig. 1

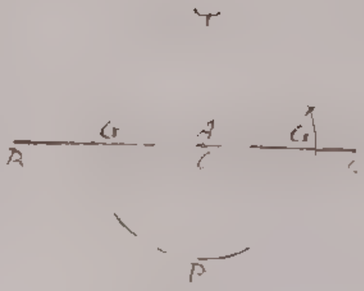


Fig. 2

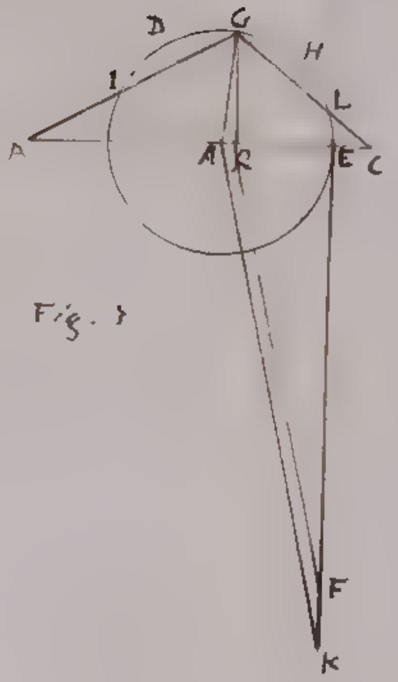


Fig. 3

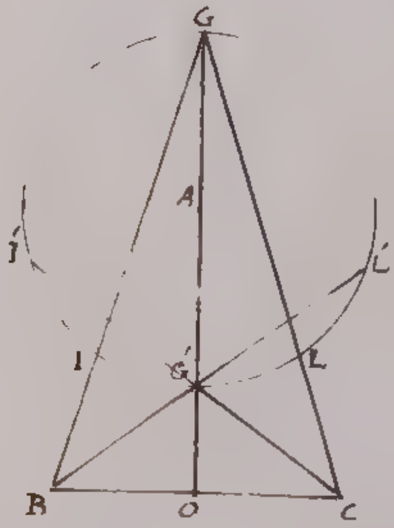


Fig. 4

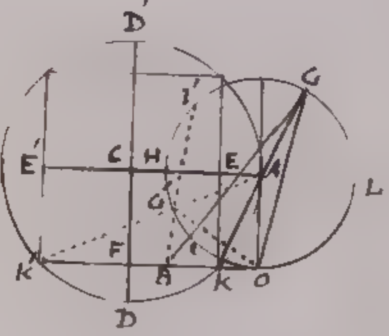


Fig. 5.

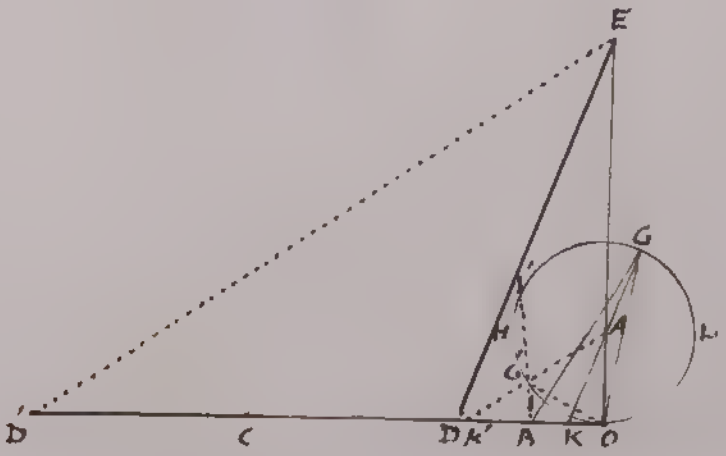


Fig. 6

Lettera

Contenente alcune Riflessioni sopra un passo nel Tomo I.
del nuovo Giornale d'Italia stampato in Modena.

Lettera

contenente alcune Riflessioni sovra un passo nel Tomo I del nuovo Giornale di Italia stampato in Modena.

Non posso a meno di non communicarvi alcune mie riflessioni sovra un passo del nuovo Giornale di Italia stampato in Modena, nel quale si incontrano parecchie cose non del tutto conformi alla verità. Dando l'estratto del quarto Tomo dell'Accademia di Siena, incomincia da un' Operetta del Dottissimo P. Borsi intorno a' problemi de' massimi e de' minimi. Il principio, su cui si fonda, consiste nel supporre la quantità, che deve essere un massimo o un minimo, trasferita nel sito infinitamente prossimo, e nel fare l'incremento, che da una parte riceve la medesima quantità, uguale al decremento, che riceve dall'altra. Il principio è verissimo, ma non nuovo, anzi da molti Scrittori adoprato frequentemente. Si legga l'Ab. Riccati nel secondo Libro del Tomo secondo delle Istruzioni Analitiche Cap. quinto, e si ritroveranno non pochi problemi senza calcolo sciolti elegantemente con una analisi lineare. Di questo Scrittore faccio particolarmente menzione, perchè di esso in appresso si parla.

Si applica il principio al difficile problema Ritrovare un punto, sicchè la somma di tre linee da esso condotte a tre punti dati sia la minima. L'analisi del P. Borsi è sommamente elegante, nè può lodarsi abbastanza. Eccola. I tre punti dati siano A, B, C (fig. 1.), il punto cercato sia O, dimodochè la somma delle rette AO, CO, BO sia minima. Si trasferisca O per la retta OB nel sito infinitamente prossimo G, onde le tre rette diventino AG, CG, BG, e co' centri A, C descritti gli archetti O7, Oe, avremo pel principio G7 + Ge = GO. Trasferiscasi in oltre per la OA il punto O in L, per modo che OL = OG, sicchè le tre linee diventino AL, CL, BL. Descritti co' centri B, C gli archetti OM, OH, il principio darà LM + LH = OL: ma OL = OG; dunque G7 + Ge = LM + LH. Se dai due angoli retti GOM, LO7 si detragga il comune 7OM, rimarrà GO7 =

LOM

LOM; dunque i triangoli rettangoli GOT, LOM sono equiangoli, e per l'egualità delle ipotenuse del tutto uguali; dunque GT = LM. Dalle equazione GT + GQ = LM + LH si levino le quantità eguali GT, LM, e resterà GQ = LH. Quindi i triangoli rettangoli LOH, GOQ sono del tutto eguali, e perciò l'angolo LOH = GOQ, ed a questi aggiunto un retto, ne risulterà LOC = GOC, ossia AOC = BOC. Collo stesso metodo si dimostrerà l'angolo AOC = BOA, e per conseguenza i tre angoli AOC, BOC, BOA saranno tutti eguali, e ciascuno di gradi 120.

Sarebbe maligno chi con sommi encomj non esaltasse l'esposta analisi. Tuttavolta vorrei, che il Sig.r Giornalista avesse avvertito, essere ancora l'Ab. Riccati con un altro giro di analisi lineare senz'alcun calcolo giunto alla medesima conclusione. Io l'esporrò quasi colle sue parole traducendola in italiano. Posto il triangolo ABD, (Fig. 2) e descritto col centro D, e con qualunque raggio DC il circolo MCN, ricerca il punto C, dove la somma delle rette AC + BC sia la minima. Prendasi il punto c all'altro C infinitamente vicino. Per la teorica de' massimi, e de' minimi sarà AC + BC = Ac + Bc; dunque i punti C, c saranno nel perimetro di un'ellissi TCG. Poichè C, c sono infinitamente vicini, l'ellissi toccherà il circolo nel punto C. La comune tangente sia PCQ. Per la proprietà del circolo, PCD = QCD, perchè l'uno e l'altro è retto: per la proprietà dell'ellissi PCA = QCB; dunque DCA = DCB; dunque allora la somma delle rette AC + BC sarà la minima, quando cotali linee fanno angoli eguali col raggio CD; dunque la somma AC + BC + DC non può essere minima, se eguali non siano gli angoli DCA, DCB. Collo stesso metodo provasi, che minima non può essere la stessa somma, se uguali non siano gli angoli ACB, DCB: adunque la somma AC + BC + DC sarà minima, quando si agguaglieranno i tre angoli DCA, DCB, ACB, e perciò ciascuno di gradi 120.

Dopo questa dimostrazione, che leggesi nelle Istituzioni, come può dire il Sig.r Giornalista, che l'Ab. Riccati

per

per isfuggire gli spinosi calcoli, che s'incontrerebbero nella via comune, ha posto in uso il metodo di esclusione? Questa ugualmente che quella del P. Frisi non si astiene da ogni calcolo, e colla sola geometria [illegible] non arriva alla medesima conseguenza? Ma domanderassi per qual cagione l'Ab. Riccati anteponga la soluzione dedotta dal metodo di esclusione, la quale riesce anzi prolissa, che no? Egli con chiarezza la reca al fine della esposta dimostrazione dicendo: *così fatto metodo ne' triangoli, i cui angoli sono tutti minori di gradi 120, è molto elegante, ed il problema si scioglie senza equazione. Ma se un angolo del triangolo maggiore sia di gradi 120, il metodo vien meno; e questa mancanza ha obbligato l'Autore a ricorrere al metodo di esclusione, il quale nel presente problema ha una massima utilità.*

Ora per voi medesimo conoscerete, quanto sia vero il giudizio del Sig.r Giornalista, il quale preferisce la dimostrazione del P. Frisi a quella, che tesse l'Ab. Riccati col metodo di esclusione. Quella del P. Frisi è imperfetta e mancante, e non abbraccia tutti i casi; laddove quella dell'Ab. Riccati è generalissima, ed alcun caso non lascia indietro. Egli è vero, che riesce alquanto lunga; ma nella medesima sua lunghezza non rimane priva di semplicità ed eleganza. Inoltre la sua generalità è un tal pregio, che si vuole ad ogni altra ragionevolmente anteporre. Il problema è stato da lui chiamato difficile, non per riguardo a que' casi, che sono stati sciolti dal P. Frisi; ma per riguardo agli altri, ch'egli ha lasciati intatti, i quali forse non si scioglieranno senza raziocinj prolissi. Vi ho voluto scrivere queste riflessioni, acciocchè ciò, che leggesi nel Giornale, che va per le mani di tutti, non oscuri la verità.

Lettera.

all'Autore della Relazione delle Instituzioni Analitiche dell'Ab. Co. Vincenzo Riccati inserita nel nuovo Giornale di Italia Tomo primo, secondo, e terzo.

Siccome io vi professo sincere obbligazioni, Sig. Giornalista Riv.mo, per le lodi, onde voi vi degnate di onorare le mie Instituzioni Analitiche, che non conosco di meritare, così non mi risento, anzi vi ringrazio della modesta censura, che andate a quando a quando spargendo nel vostro estratto. Io son d'un carattere, che amo di imparare dagli altri, e godo di essere corretto, e ricondotto sul sentiero, qualora da esso mi sia dipartito. Tuttavolta voi gradirete, che in alcune cose da voi notate io renda buon conto di me, e delle ragioni che mi hanno indotto ad operare come ho giudicato espediente, e che nello stesso tempo amichevolmente vi avverta di alcune cosarelle, che leggendo il vostro estratto mi sono date negli occhi.

Alla pag. 34. del Tomo primo voi dite, i problemi semideterminati esser quelli, che contenendo pari numero di condizioni e di incognite, non somministrano equazioni per esprimerle tutte. Così fatta definizione mi sembra oscura, e può di leggieri condurre al falso. Si dovrebbe dire, che i problemi semideterminati a parlar giusto sono del genere degl'indeterminati; perchè il numero delle equazioni, che somministrano, è minore del numero delle incognite: ma a cagione di alcune condizioni aggiunte, che non si lasciano esprimere con equazioni, viene ristretto il numero delle infinite soluzioni, onde sono capaci. Tali sono le condizioni, che i numeri siano positivi ed interi, che sien quadrati, o cubi &c.

Pag. 43. L'analogia, che passa tra il circolo, e l'iperbola equilatera, è stata notata da molti, e tra gli altri dal Mac-Laurin più diffusamente, e questa mi ha indotto ad introdur nell'analisi i seni e i coseni iperbolici, siccome l'Eulero vi aveva introdotti i circolari. Per altro non bisogna ricavare senza esame l'analogia tra gli archi circolari, e i

logaritmi

logaritmi immaginarj, donde deducesi esser il diametro alla circonferenza del circolo come $\sqrt{-1} : l-1$, siccome dice esser prima di ogni altro avvertito il Bernoulli.

Seguendo il metodo di questo insigne Scrittore, prendo la formola $\frac{a^2dz}{z^2+a^2}$ esprimente l'elemento dell'arco circolare col mezzo della tangente $= z$. Per ridurla ai logaritmi, fo uso della sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, dalla quale proviene $z = a\sqrt{-1}\cdot\frac{t+a}{t-a}$, $dz = -\frac{2a^2\sqrt{-1}\cdot dt}{\overline{t-a}^2}$, e di più $z^2+a^2 = \frac{-4a^3t}{\overline{t-a}^2}$. Compiute le sostituzioni, la formola si cangerà nella $\frac{a\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{dt}{t}$, ch'è una formola logaritmica indicante l'elemento di un arco circolare.

Presa la sottotangente $= a$, passo all'integrazione colla necessaria aggiunta della costante, e mi si presenta $\frac{\sqrt{-1}}{2}lt - A$. Questa, fatta $z = 0$, dev'esser nulla, perchè nullo è l'arco, nulla essendo la tangente: ma fatta $z=0$, si ha $t = -a$; dunque $A = \frac{\sqrt{-1}}{2}l-a$, e per conseguenza la vera integrazione, che ci dà l'arco circolare, sarà $\frac{\sqrt{-1}}{2}.lt - \frac{\sqrt{-1}}{2}.l-a = \frac{\sqrt{-1}}{2}.l-t$, determinando il protonumero $= a$. Il perchè sembra, che siasi ridotto l'arco di cerchio ad un logaritmo immaginario. Esaminiamo in qual senso ciò si verifichi.

Se alcuno si pensasse d'aver ridotto l'arco ad un logaritmo reale moltiplicato per $\sqrt{-1}$, s'ingannerebbe di assai; perchè questo è ~~tanta~~ impossibilità, quanto che una quantità reale uguagli un'immaginaria. Si osservi di qual genere sia la quantità t. Se si supponga z reale, come esser dee, acciocchè l'arco reale sia, la t è sempre immaginaria, ~~conforme~~ qualmente dichiara la formola $t = a\cdot\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$. Che se qualcuno ne dubitasse, nè lo trovasse abbastanza chiaro, usi di questo metodo. Moltiplichi, e divida la formola per $z+a\sqrt{-1}$; e ne nascerà

$t = a\cdot\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2} = a\cdot\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2} + \frac{2a^2z\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$; la quale è sempre immaginaria. Adunque lt, è un logaritmo di un numero immaginario, che vuolsi riguardare come quantità immaginaria

immaginaria. Perciò l'arco circolare si trova uguale al logaritmo immaginario d'un numero immaginario, nella qual quantità entrando gli immaginarj due volte, è necessario che si distruggano, e che in sostanza la ritrovata quantità sia reale. Quindi a parlare in tutto rigore non si dee dire, che gli archi circolari si riducano ai logaritmi immaginarj, ma bensì ai logaritmi immaginarj dei numeri immaginarj. Ma procediamo:

Se facciasi $z = a$, si avrà il semiquadrante: ma fatta $z = a$, si ha $t = \frac{a + a\sqrt{-1}\,.\,a}{a - a\sqrt{-1}}$; dunque il semiquadrante si esprimerà per $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\, a\,.\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$, e moltiplicando per 4 si avrà la circonferenza $= 4\sqrt{-1}\,.\, l.\, a\,.\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$.

Con qual giro di calcolo ritrova il Sig.r Bernoulli la circonferenza al diametro come $l.-1 : \sqrt{-1}$? Io penso, che abbia fatto un somigliante discorso. Se si ponga z infinita, si ha il quadrante di circolo: ma fatta $z = \infty$, si ritrova $t = a$; dunque il quadrante sarà $= \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.-a$, e la circonferenza $= 2\sqrt{-1}\, l.-a$, ossia la circonferenza al diametro come $-l.-a : a\sqrt{-1}$, e ponendo $a = 1$, come $-l.-1 : \sqrt{-1}$. E perchè $-l.-1 = l.\frac{1}{-1} = l.-1$, ne risulterà finalmente la proporzione $l.-1 : \sqrt{-1}$, la quale perfettamente si accorda con quella del Bernoulli da voi veduta. Così fatto discorso è infetto da quel paralogismo, in cui è caduto il dottissimo Sig.r Du Gua, siccome hanno avvertito il Cramer, ed altri. Vero è, che fatta $z = \infty$ si ha il quadrante di circolo; ma è falso, che sia $t = a$. Non nego, che posta $z = \infty$, non sia a rispettivamente ad essa minor di qualunque data, onde in riguardo alla quantità trascurar si potrebbe: ma ella è moltiplicata per $\sqrt{-1}$, e per conseguenza immaginaria, e quindi per quanto sia piccola rendendo immaginaria non meno $z + a\sqrt{-1}$, che $z - a\sqrt{-1}$; la t seguita ad essere immaginaria, e però paralogizza chi la fa uguale alla quantità reale a, cioè al raggio del circolo. Ciò apparisca più chiaro

nella

nella formola $t = a \cdot \frac{z^2-a^2}{z^2+a^2} + \frac{2a^2z\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$, in cui il secondo membro sempre immaginario renda tutta la quantità, e per conseguenza la t, onde non si può fare, posta $z=\infty$; $l-t = l-a$ ...

Alcuni sono di avviso, che il settor circolare si esprima per un settor iperbolico immaginario, e viceversa. Giacchè l'occasione mi invita, piacemi qui di dire quattro parole intorno a questa opinione. Si seguino gli angoli retti adiacenti CAT, KAT (fig. 3.), e chiamata $CA=a$, l'equazione $y=\sqrt{a^2-x^2}$ sarà ad un circolo. Finchè la x è minore di a, si ha nell'angolo CAT un circolo reale AN: ma se sia $x>a$, onde provenga $y=\sqrt{-1}\sqrt{x^2-a^2}$, si avrà nell'angolo KAT un circolo immaginario. Similmente l'equazione $y=\sqrt{x^2-a^2}$, che è all'iperbola equilatera, finchè x è maggiore di a, dà nell'angolo KAT un'iperbola reale AQ: ma se facciasi $x<a$, nascerà nell'angolo CAT un'iperbola immaginaria. Adunque nell'angolo CAT, dove $x<a$, abbiamo un circolo reale, ed un'iperbola immaginaria, e nell'angolo KAT, dove $x>a$, un'iperbola reale, ed un circolo immaginario.

Ciò posto, il settore CAN si esprime per $\int \frac{a^2 dx}{2\sqrt{a^2-x^2}}$. Fintanto che $x<a$, si ha il settor circolare reale CAN: ma se prendasi $x>a$, la formola si cangia in $\int \frac{a^2\sqrt{-1}\cdot dx}{2\sqrt{x^2-a^2}}$. A parlar con rigore, questa formola appartiene ad un settore del circolo immaginario costituito nell'angolo KAT, il qual settore si agguaglia al settor reale iperbolico CAQ moltiplicato per $\sqrt{-1}$. Laonde si dee dire, che il settor del circolo immaginario è uguale al settor reale iperbolico moltiplicato per $\sqrt{-1}$. Collo stesso discorso si proverà, che posta $x<a$, il settor dell'iperbola immaginaria è uguale al settore reale del circolo moltiplicato per $\sqrt{-1}$. Queste poche parole sono sufficienti per rimovere gli equivoci, in cui trattando di immaginarj facilmente si cade.

334

Pag. 44. Dice ch'io chiamo l'ordinata AB seno, e l'assissa CB coseno del logaritmo CG. Si dovrebbe dire del logaritmo di CG; perchè CG è numero, e del logaritmo di questo numero quelle linee sono seno, e coseno.

Pag. 45. Siccome (così Voi Sig. Giornalista) nel caso di un'equazione del terzo grado sia irreducibile, cioè abbia tutte e tre le radici reali, essa si può non pertanto sciogliere colla trisezione dell'angolo; così tutte quelle che sono comprese sotto la sua formola, in una sezione dell'angolo ritrovano la loro soluzione, cioè ne' seni e coseni circolari, oppure negli iperbolici. Si dovrebbe dire, che quando le formole simili alla cardanica rinchiudono gli immaginarj, si ottiene il loro valore colla divisione dell'angolo esprimendo un seno, o coseno di un arco submultiplo di un dato: ma quando non contengono immaginarj, se n'ottiene il valore colla divisione di un logaritmo analogo, esprimendo il seno o coseno di un logaritmo submultiplo di un dato: La divisione de' logaritmi in parti eguali dipende dalla interserzione di più medie proporzionali.

Pag. 46. Mi sembra strano, che il Capitolo tratto dal mio Comentario, dove io il primo ho insegnato il metodo di ritrovar universalmente la somma generale delle serie, che ne sono capaci, non abbia, come voi asserite, connessione colle cose precedenti, e susseguenti. Non ho io incominciato a parlar delle serie sin de' primi Capitoli del Libro primo, insegnando come si formino e colla divisione, e coll'estrazione delle radici? Non ne faccio uso nel Tomo secondo Lib. 1. Cap. 1. per esporre l'archimedea quadratura della parabola? Non fondo sovra tale invenzione la quadratura delle curve, facilitandone l'uso con accomodate regole? Non insegno nel Cap. 4. dello stesso Libro l'integrazione delle formole col mezzo di serie infinite? Non mi servo nel Capitolo seguente del ritrovamento della somma general delle serie per ritrovare la formola generale delle equazioni, che ricevono la radice simile alla cardanica? ~~Non fondo sovra tale invenzione la quadratura delle curve, facilitandone l'uso con accomodate regole?~~ E come potea ommettere una teorica, di cui tanto mi

serve

servo, e che ritorna alla serie senza fallo e la più compita? Se non dovea ommettersi, in qual luogo si dovea collocare? Non prima, perchè dipende dalla risoluzione delle equazioni; non dopo, perchè di essa avea immediatamente bisogno per ritrovare la detta equazion generale. Per altro avrei desiderato di poter esporre un metodo di ritrovare la somma di tutte le serie di infiniti termini; che la [illegible] ne siamo mancanti [illegible]

Alla pag. 46. Voi avreste voluto o Signora, ch'io parlassi più a lungo de' limiti delle equazioni, che nella mancanza de' metodi sono per l'analista l'unico rifugio. Le dotte fatiche de' Signori la Grange in Berlino, e Waring in Inghilterra vi faranno conoscere i giusti motivi, che m'hanno indotto ad usare strettissima brevità. E come dovea estendermi in una teorica, che allora era non sol imperfetta, ma ancor fallace, e ch'io conosceva per tale?

Alla pag. 47. Voi dite, che meritava parimente luogo un trattato compito delle estrazioni delle radici delle quantità parte razionali, e parte sorde; perchè sono esse necessarie per la risoluzione aritmetica delle mie formole simili alla cardanica. Con queste parole Voi insinuate, che dovea esporre un metodo per trovar la $\sqrt[3]{m \pm \sqrt{\pm n}}$, essendo m, n numeri razionali. Se Voi, o Signora, mi insegnerete questo tal metodo, ve ne resterò con obbligo, ed imparerò da voi quel, che non so. Il Bombelli è stato il primo, che ha dato qualche esempio di cotali radici. Appresso il Wallis ne ha trattato più a lungo, dando il metodo come suo, e come universale. Ma l'Halley si è avveduto di tale universalità, ed ha giudicato più facile ritornar alle equazioni del grado 3, per ritrovar la radice, che risolvere quei binomj. L'osservazione dell'Halley è stata appieno approvata dal Montucla, ed insieme accusato il Wallis di aver a se attribuita l'invenzione del Bombelli. Di fatto l'estrazione non si può ottenere, se non per un'attentazione; che non viene diretta da alcun principio, e che devesi attribuire, se riesce, ad un fortunato accidente.

Alla stessa pag. non mi perdonate l'ommissione della

regola

regola del Newton per ritrovare il numero delle radici im=
maginarie. Ma la regola del Newton sebbene il più delle
volte sia vera, pure in alcune occasioni è fallace, e per tale
riconosciuta da' suoi medesimi Inglesi. Vero è, che essi han-
no procurato di correggerla, dandone un'altra inviluppa=
ta anzi che no, la quale finora non si è trovata in fallo, che
quantunque non sia munita da alcuna dimostrazione, senza
di cui mi sono astenuto di esporre veruna teorica. Le in=
venzioni de' nominati la Grange, e Waring daranno intor=
no a ciò piena luce

Alla pag. 53. non è senza paralogismo il discorso, on=
de ricavare la quadratura della parabola, ed è somma=
mente diverso dal vero. Voi dite, che l'incremento del tri=
lineo parabolico ABC (Fig. 4.), cioè BCcb s'accosta oltre o=
gni limite al rettangolo $ydx = \frac{x^2dx}{a}$. Verissimo. L'incre=
mento soggiugnete di $\frac{x^3}{3a} = \frac{x^2dx}{a} + \frac{xdx^2}{a} + \frac{dx^3}{3a}$ si avvicina
oltre ogni limite a $\frac{x^2dx}{a}$; e quindi ne raccogliete, che il
trilineo ABC è uguale a $\frac{x^3}{3a}$: conseguenza troppo preci=
pitata. Altro non si può dedurre, se non che l'incremento
del trilineo si agguagli all'incremento di $\frac{x^3}{3a}$. Ma questo
potrebbe esser vero, senza che il trilineo ABC fosse ugua=
le ad $\frac{x^3}{3a}$. Per dimostrarlo conviene intender diviso il tri=
lineo in tanti spazietti BCnm, mnpo &c., e condotte
le ne, pf &c. dimostrare, che tutti i rettangoli prossimamen=
te s'accostano oltre ogni limite tanto al trilineo ABC,
quanto ad $\frac{x^3}{3a}$, e poscia inferirne, che il trilineo è $= \frac{x^3}{3a}$.
La necessità di procedere con tal rigore apparisce chiara
nelle curve assintotiche, nelle quali sovente non è facile
a dimostrare, che la somma di tutti i rettangoli s'accosta
oltre di ogni limite allo spazio curvilineo, sebbene dell'
ultimo rettangolo ciò si prova con tutta facilità.

Qui giacchè l'occasione mi si presenta, voglio esporre
una riflessione. Parecchie quistioni dipendono da un sol
punto della curva, come sarebbe l'invenzione delle ordinate;
alcune dipendono da due, e spesso infinitamente vicini,

come

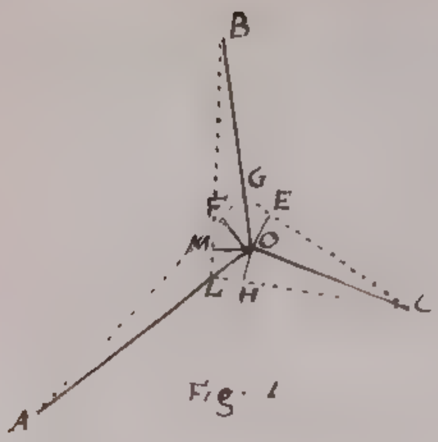


Fig. 1

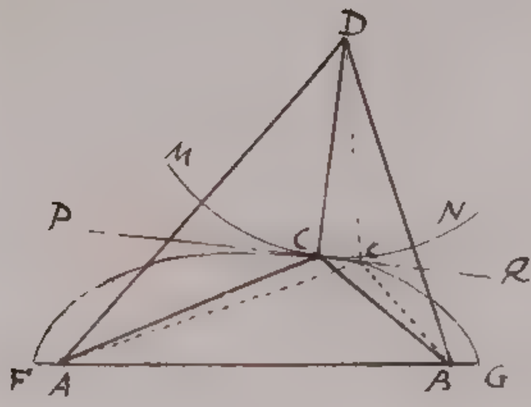


Fig. 2.

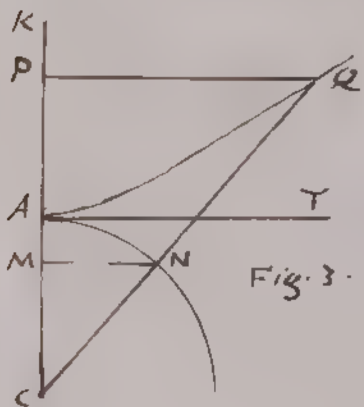


Fig. 3.

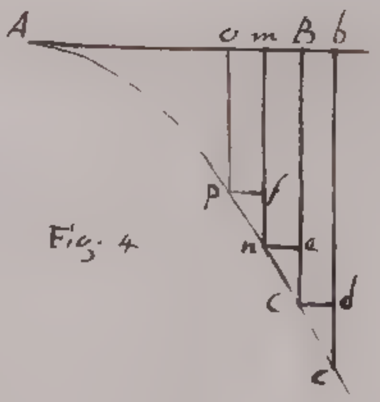


Fig. 4

[illegible]

come l'invenzione della tangente; alcune da tre, come il raggio dell'osculo, e così via via. Alcune frattanto dipendono da tutti quanti i punti, che però conviene mettere a computo. Di tal genere si è la quadratura della curva, e le questioni analoghe, le quali non si scioglieranno mai a dovere, senon con un metodo, che tenga conto di tutti i punti.

Tomo 2. pag. 219. Non crederei, che Voi, o Signore, voleste obbligare gli Autori a seguire quel metodo, che vi siete proposto, e che altri Autori hanno lodevolmente seguito. Se avessi scelto il metodo di parlar prima del calcolo differenziale, e delle affezioni della curva, che da esso deduconsi; appresso del calcolo integrale, e delle affezioni, che ne abbisognano, voi avreste ragione di apporni una perpetua confusione, e di aver fuori d'ogni buon ordine mescolata una cosa coll'altra. Ma il mio metodo è interamente diverso; e voi dovete esaminare s'esso sia buono e ordinato, non se sia conforme a' metodi altrui. Acciocchè siate in istato di fare meglio cotal disamina, ve l'esporrò minutamente. Mio disegno è stato di unire insieme il calcolo differenziale e integrale, dividendo l'Opera in due parti. Nella prima tratto delle prime differenze, nella seconda delle differenze seconde e ulteriori. Quanto alla prima la divido in due libri. Nel primo tratto di quella parte del calcolo differenziale e integrale, che conduce o scioglie formole composte di una sola variabile. Egli è vero che mostro nel principio la differenziazione, ed integrazione d'alcune semplicissime formole a due variabili; perchè ne faccio uso in progresso in alcune formole d'una variabile. Ma la facilità, e l'eleganza permette agli autori una sì discreta libertà. Nel secondo libro tratto di quella parte del calcolo differenziale e integrale, che conduce, o scioglie formole composte di due o più variabili. Nella seconda parte, che forma il terzo libro, parlo del calcolo differenzio-differenziale, e del suo integrale. Sembrami d'aver esattamente seguito cotesto metodo, che mi sono proposto.

Eccovi la ragione, che m'ha indotto ad abbandonare il metodo antico. Se avessi prima parlato del calcolo differen-

ziale

ziale, e poi dell'integrale, sarebbe stato di mestieri, che col differenziale trovassi le formole, e con esse sciogliessi i problemi diretti; indi passando all'integrale la richiamassi di nuovo per applicarla ai problemi inversi, il che porta lunghezza e nojosa ripetizione. Per esempio nel differenziale avrei dovuto dedurre la formola della sottotangente $y\frac{dx}{dy}$, e poscia con essa determinar la tangente della data curva. Venendo poi al calcolo integrale, sarei stato costretto a parlar la seconda volta della stessa formola a cagione di sciogliere i problemi inversi. Non torna egli più spedito il trattarne una volta sola, applicandola a' problemi diretti e inversi? E ciò che dico di un caso, si dica di mille altri. Quanto a' principianti, io ne ho fatto replicate prove, e vi assicuro, che il mio metodo riesca loro più facile del comune.

Pag. 221. Vi fermate in questo luogo e supplite alla mia mancanza, ed a ciò che insegno, cioè che se sia o $dy=0$, o $dy=\infty$, si ha sempre la tangente parallela o all'asse, o alle ordinate, ma non sempre una massima, o minima ordinata. Voi aggiungete una regola tratta dal Mac-laurin, che insegna, che se svanendo la dy non isvanisca la ddy, ovvero con questa svanisca ancora la d^3y, ma non la d^4y, e generalmente se ~~differenze~~ le differenze evanescenti siano in numero dispari, vi avrà massimo o minimo, ma non vi avrà se siano in numero pari. Soggiungete poscia, che vi dispiace di non trovar questa regola in un luogo, dove cadeva così in acconcio. Mostrandovi del metodo così sollecito, avreste ragion di accusarmi, se ivi l'avessi posta; imperciocchè qualunque ella siasi esige il calcolo differenzio-differenziale, che al terzo libro era riservato.

Vi studiate di dedurre quella regola dalla formola $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ &c., a cui, voi dite, si può ridurre l'equazione di qualunque curva. Perdonatemi Signore questo è un errore troppo visibile, in cui forse la soverchia fretta vi ha fatto cadere. Questa altro non è, che l'equazione delle più semplici paraboloidi. L'equazione, a cui si possono

ridurre

riducere tutte quelle della curva algebraica, si è la seguente.

$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Kx^4$ &c. $= 0$.

Da questa nel primo Tomo ho ricavata l'indole e la natura de' punti singolari, la quale manifesta se vi abbia massimo, o minimo [illegible]

E' vero il teorema, che vi siete proposto di dimostrare, che se l'ordinata, che corrisponde ad x, sia y, l'ordinata, che corrisponde ad $x+dx$, sarà $y \pm dy + \frac{ddy}{2} \pm \frac{d^3y}{2\cdot3} + \frac{d^4y}{2\cdot3\cdot4} \pm$ &c. ma deducendolo voi da un'equazione assai particolare, non lo dimostrate generalmente. Se volete una dimostrazion generale, leggete nelle mie Instituzioni il Cap. 15. del Libro 3. In quel luogo vedrete notato, che non sempre è lecito il determinare con quella serie l'indole de' punti singolari; perchè se tutte le differenze si trovino $=0$, essa dipende da què termini, che nelle successive differenziazioni si ommettono.

Pag. 229. Vi degnate d'approvare il metodo di esclusione, onde ho sciolto il problema: *Ritrovar in un triangolo un punto, da cui la somma delle linee condotte agli angoli sia la minima*; perchè con altri metodi il problema non si scioglie generalmente, ma sol per metà: e questa è stata la ragione, che m'ha indotto ad abbracciare quel metodo. Ma dopo ciò come mai riferendo il quarto Tomo dell'Accademia di Siena potete dire, ch'io per isfuggire i nojosi calcoli, ho eletto il metodo d'esclusione, ch'è alquanto lungo, e che perciò si dee alla mia soluzione anteporre quella del Dottissimo P. Frisi? Non per evitare i calcoli fastidiosi, ma per ottenere una soluzione generale, ho eletta l'esclusione. Ora questa soluzion generale la dà il P. Frisi? no certamente. Io pure ne ho data una simile alla Frisiana, sebbene con altro giro di raziocinio, come vi certificherete leggendo il Num.° 40. del Cap. 5., che incomincia *Quaeras fortasse aliquis.*, ed ho dedotte la medesima conseguenza: ma di questa non mi sono appagato, perchè non è generale. La mia soluzione è lunghetta, ma cotal lunghezza non dee impedire, che non abbia ad anteporsi a soluzioni mancanti e imperfette.

Pag. 247.

34r

Pag. 247. Voi nello spiegare la regola per conoscere, se le formole differenziali di qualunque grado siano si o no capaci d'integrazione, ommettendo le riflessioni ad i casi più difficili, seguite con tutta esattezza il mio metodo; onde non so vedere per qual ragione m'accusiate d'oscurità, e diciate di rimpastar la materia in grazia de' Principianti.

La riflessioni Sig.re Rev.mo, che prendo li ardire di inviarvi, manifestano la stima, che faccio di Voi e del vostro sapere, che se in me non fosse grandissima, non mi avrei preso il pensiero di esaminar ogni cosa minutamente. Se mi ritrovate abile; mi giudicherò fortunato di potervi servire, e ubbidire, e con pienissimo rispetto mi sottoscrivo.

Treviso li 29. Agosto 1723.

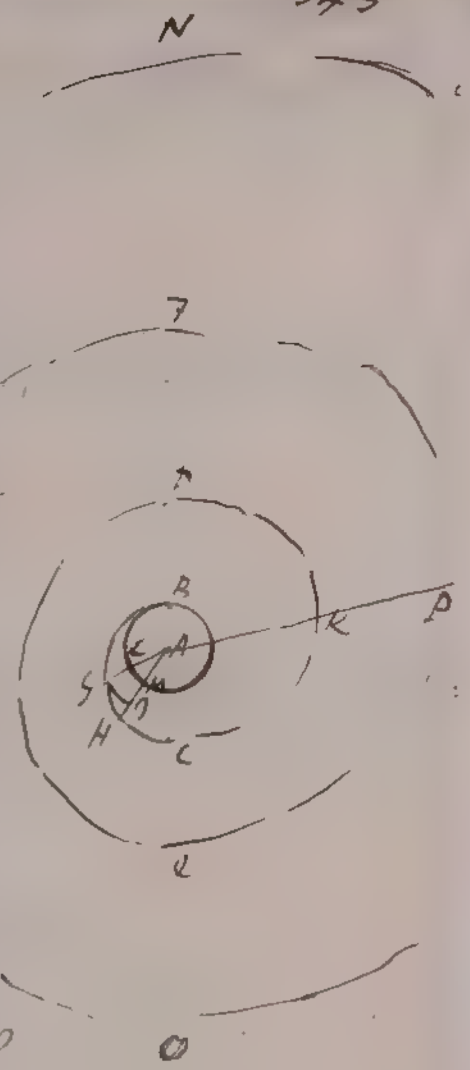
[illegible] 8bre 1755

[illegible]

Problema

Trovare nella Spirale Iperbolica la proporzione fra le aree.

Trovare nella Spirale iperbolica BGCKDQ7 la proporzione fra l'aree BGCKD, DQ7.



Sia A il centro della spirale, $AG = y$, $DH = dy$, $DG = dx$, $HG = ds$, e g la sottangente costante, e l'equazione della curva $dx = \frac{g\,dy}{y}$. Tutta l'area della spirale preso principio dal centro A relativamente a cui $y = 0$ si uguaglia a $\frac{1}{2}\int y\,dx = \frac{gy}{2}$; donde la in cui posta $y = 0$, ... rimane l'area $\frac{gy}{2} = 0$.

Per discoprire le aree BGCKZ, DQ7, rimane da scoprire, chiamata $AB = m$, i valori delle linee AD, A7. Col raggio $AB = m$ si descriva il circolo BLM, e sia l'arco $BL = z$, ed il suo elemento $LM = dz$. Per la simiglianza dei settori ALM, AG7, avremo $AL : LM :: AG : GD$

$m : dz :: y : dx$

analogia da cui si ricava $dx = \frac{y\,dz}{m}$. Surrogando nella equazione della curva in cambio di dx lo scoperto valore, si ha $\frac{y\,dz}{m} = \frac{g\,dy}{y}$, e da qui

$dz = \frac{mg\,dy}{y^2}$, ed integrando

$z = h - \frac{mg}{y}$. Si determinerà

la costante h riflettendo che quando nel sito B $z = 0$, $y = AB = m$, cioè $h = g$ costante ... Per tanto $zy = gy - gm$ avremo, e conseguentemente $\frac{gm}{g - z} = y$. Nomino

c

e la circonferenza del circolo ALMB, e quando sarà $y = AD$ corrisponderà $z = c$ e $y = AZ$ corrisponderà $z = 2c$. Quindi avremo $AB = m$, $AD = \frac{gm}{g-c}$, $AZ = \frac{gm}{g-2c}$.

L'area totale che conviene all'ordinata $AB = m$ sarà $\frac{gm}{2}$; quella che conviene alla ordinata $AD = \frac{gm}{g-c}$ sarà $\frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-c}}$; e finalmente $\frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-2c}}$ converrà in numero all'area totale corrispondente della ordinata $AZ = \frac{gm}{g-2c}$. Sottraendo dall'area $\frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-c}}$ l'area $\frac{gm}{2}$, ne risulta la misura dell'area $BGCKD = \frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-c}} - \frac{gm}{2}$ $= \frac{g^2m - g^2m + cgm}{2\cdot\overline{g-c}} = \frac{cgm}{2\cdot\overline{g-c}}$. Similmente detraendo dall'area $\frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-2c}}$ l'area $\frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-c}}$, si rinviene la misura dell'area $DCZ = \frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-2c}} - \frac{g^2m}{2\cdot\overline{g-c}} =$

$$\frac{g^3m - cg^2m - g^3m + 2cg^2m}{2\cdot\overline{g-2c}\cdot\overline{g-c}} = \frac{cg^2m}{2\cdot\overline{g-2c}\cdot\overline{g-c}}$$

[illegible] : :

[illegible]

La serie delle aree [illegible], analoghe alle BGCKD, DCZ, e la seguente

che $\frac{cg^n m}{r\cdot\overline{g+3c}\cdot\overline{g+2c}}$, $\frac{cg^n m}{r\cdot\overline{g+2c}\cdot\overline{g+c}}$, $\frac{cg^n m}{r\cdot\overline{g+c}\cdot g}$, $\frac{cg^n m}{r g\cdot\overline{g-c}}$, $\frac{cg^n m}{r\cdot\overline{g-c}\cdot\overline{g-2c}}$, $\frac{cg^n m}{r\cdot\overline{g-2c}\cdot\overline{g-3c}}$

che è la serie delle ordinate rotte tutte nella linea AD

e $\frac{gm}{g+3c}$, $\frac{gm}{g+2c}$, $\frac{gm}{g+c}$, $\frac{gm}{g}$, $\frac{gm}{g-c}$, $\frac{gm}{g-2c}$, $\frac{gm}{g-3c}$ &c.

Da questa serie si può ricavare di nuovo quella dei prodotti di due ordinate contigue

e $\frac{g^n m^2}{\overline{g+3c}\cdot\overline{g+2c}}$, $\frac{g^n m^2}{\overline{g+2c}\cdot\overline{g+c}}$, $\frac{g^n m^2}{\overline{g+c}\cdot g}$, $\frac{g^n m^2}{g\cdot\overline{g-c}}$, $\frac{g^n m^2}{\overline{g-c}\cdot\overline{g-2c}}$, $\frac{g^n m^2}{\overline{g-2c}\cdot\overline{g-3c}}$

Paragonata attentamente serie con quella che esprimente le aree inscritte nel raggio vettore dopo una giravolta ritroveremo, che le aree suddette si eguagliano al prodotto della distanza dal centro A e il termine, ed il fine della giravolta, o sia AB·AD, moltiplicata in $\frac{c}{rm}$ quantità costante [illegible] la proporzione tra la circonferenza e del circolo, ed il suo raggio rm.

Si conclude essere l'area BGCKD = $\frac{c}{rm}$·AB·AD, l'area DCZ = $\frac{c}{rm}$·AD·AZ e così generalmente non solo ne' [illegible] ma anche in diverse spirali, stella, ma [illegible] determiniamo la proporzione delle aree [illegible] tempi [illegible] sia di [illegible] in ragione che una sola [illegible] moltiplicata della distanza dal centro A [illegible], conforme [illegible] dal Co. Jacopo mio Padre.

Se in diverse spirali la distanza AB sarà come la suttangente g, si troveranno pure nella stessa ragione le altre distanze AD, AZ, &c, e le aree BGCKD e conseguentemente anche i tempi periodici staranno come g^2, cioè come i quadrati delle sottotangenti.

Trovare nella spirale logaritmica BGCKDeZ la proporzione tra le aree BGCKD [illegible] eZ.

Ritenute le superiori denominazioni, la nostra curva ha per sua equazione $dx = g\,dy$. Tutta l'area della spirale cominciando dal centro A, in riguardo al punto $y=0$, si eguaglia a $\frac{1}{2}\int y\,dx = \frac{gy^2}{4}$. Non si aggiunge costante, poichè posta $y=0$ si trova come è dovere $\frac{1}{2}\int y\,dx = 0$. Sia la linea AZ data di posizione, e nominata AB $= m$, e trovati i valori delle linee ZD, AZ, col loro mezzo scopriremo il [illegible] della aree BGCKD, scorrendo [illegible]. Fatto centro in A, col raggio AB $= m$ si descriva il cerchio BLMB, e chiamato come sopra l'arco BL $= z$, ed il suo elemento LM $= dz$, diverrà [illegible] $dx = \frac{y\,dz}{m}$. Sostituendo nella equazione della curva in vece di dx il suo valore ora trovato, si avrà $\frac{y\,dz}{m} = g\,dy$; ossia $dz = \frac{gm\,dy}{y}$; ed integrando $z = ly$ nella logaritmica della suttangente gm. Ommetto l'aggiunta della costante, perchè [illegible]

cie

che al $y = AB = m$ ci corrisponda il logaritmo nullo, di modo che posta $u = AB = m$ si trovi $z = 0$.

Siccome c la circonferenza del circolo BLMB, e al $y = AD$ corrisponderà $z = c$, al $y = AF$ $z = 2c$ &

~~Dunque~~ AB=m, AD

Si rileva essere il logaritmo di $AB = m$ eguale a nulla, il logaritmo di AD eguale a (c), il logaritmo di AF eguale a $(2c)$. I prodotti logaritmi adunque, formano una serie aritmetica $0, c, 2c$ e perciò le linee AB, AD, AF costituiscono una serie continua geometrica. Se pertanto col Sig. Cavaliere Padre chiameremo $AF = B$, $AD = b$, ne risulterà $AB = \frac{b^2}{B} = m$

L'area totale della nuova curva compresa dal centro A sino all'ordinata $AB = \frac{b^2}{B}$ si eguaglia a $\frac{gb^4}{4B^2}$, e l'aree totali sino alle ordinate $AD = b$, $AF = B$ sono, come si è trovato, $\frac{gb^2}{4}$, $\frac{gB^2}{4}$. Levando dall'area $\frac{gb^2}{4}$ l'area $\frac{g}{4}\cdot\frac{b^4}{B^2}$ il residuo ne dà la misura dell'area

$$BSCKD = \frac{gb^2}{4} - \frac{gb^4}{4B^2} = \frac{gb^2}{4B^2}\cdot\overline{B^2-b^2}.$$

Levata parimente dall'area $\frac{gB^2}{4}$ l'area $\frac{gb^2}{4}$ ne avremo l'area $DCF = \frac{g}{4}\cdot\overline{B^2-b^2}$. Paragonate adunque queste aree le avremo

nella

nella proporzione di $\frac{3b^2}{4\beta^2}\cdot\bar{\beta}^2 b^2 : \frac{3}{4}\cdot\beta^2 b$

cioè a dire come $b^2 : \beta^2$

Le nostre aree sono quelle che descrive l'ordinata della serie, facendo ritorno ~~intorno~~ il centro A un intero rivolgimento, e queste aree hanno come i quadrati delle massime ordinate AD, AZ.

La detta proprietà si verifica anche in rivolgimenti non contigui. E voglia il vero, fatto uno nuovo giro intorno, sarà l'area DCZ, alla area ZON come $\overline{AZ}^2 : \overline{AN}^2$. Ma l'area BCD alla DCZ si riferisce come $AD^2 : AZ^2$; dunque l'area BCD alla ZON corrisponde nella ragione di $AD^2 : AN^2$.

Condotta a piacimento una linea AKB, sarà sempre AK : AB :: AD : AZ e la ragione sia a, anche tra i logaritmi di AK, e di AD cioè quella stessa differenza (c) che passa tra i logaritmi di AD, e di AZ. Ora nella Logistica le rette di ordinate restano in medesima proporzione quando è costante differenza dei loro logaritmi; e così nella Spirale Logaritmica si domanda il requisito, che menata ad arbitrio una linea AN pel centro A, le linee AK, AD, AZ, AN costituiscano una ~~data~~ serie geometrica di data proporzione.

In diverse spirali la detta proporzione è

varia

variar . . . in un altra spirale $bgckd$ 351

la cui equazione $dx = h\,dy$, ed abbiasi

$ab = m$, $ad = e$, $a\,d' = e$

e dalla natura dei logaritmi si

deduvono ... ab ... ad, ad è af

come $m^{\frac{d}{h}} : b^{\frac{g}{h}}$. Fatte le sostituzioni

convenienti troveremo $ad = e = m^{\frac{h+g}{h}} b^{\frac{g}{h}}$

$af = e = m^{\frac{h-2g}{h}} \cdot b^{\frac{2g}{h}}$. Ora

giacchè $ab = m = \frac{b^2}{\beta}$ ne risulta

$$e = \frac{b^{\frac{2h-2g}{h}} \cdot b^{\frac{g}{h}}}{\beta^{\frac{h-g}{h}}} = \frac{b^{\frac{2h-g}{h}}}{\beta^{\frac{h-g}{h}}}$$

$$\text{ed } e = \frac{b^{\frac{2h-4g}{h}} \cdot b^{\frac{2g}{h}}}{\beta^{\frac{h-2g}{h}}} = \frac{b^{\frac{2h-2g}{h}}}{\beta^{\frac{h-2g}{h}}}$$

Quindi pertanto l'area $def = \frac{h}{4} \cdot \overline{e^2 - e^2}$

adempiute le convenienti sostituzioni

troveremo $def = \frac{h}{4} \cdot \frac{b^{\frac{4h-4g}{h}}}{\beta^{\frac{2h-4g}{h}}} - \frac{b^{\frac{4h-2g}{h}}}{\beta^{\frac{2h-2g}{h}}}$

Se per esempio fosse $h = \frac{1}{2}g$ si

troverebbe $def = \frac{h}{4} \cdot \frac{b^4}{\beta^{-6}} - \frac{1}{\beta^{-2}} = \frac{h}{4} \cdot \overline{\frac{\beta^6}{b^4} - \beta^2}$

$= \frac{h}{4} \cdot \frac{\beta^2}{b^4} \cdot \overline{\beta^4 - b^4} = \frac{\frac{1}{2}g}{4} \cdot \frac{\beta^2}{b^4} \cdot \overline{\beta^2 - b^2} \cdot \overline{\beta^2 + b^2}$

Sarà dunque $\overline{\beta^2 - b^2} : \frac{\frac{1}{2}g}{4} \cdot \frac{\beta^2}{b^4} \cdot \overline{\beta^2 - b^2} \cdot \overline{\beta^2 + b^2}$

$\therefore e\,7 : def :: \frac{g}{4}$

$\therefore 2b^4 : \beta^4 + \beta^2 b^2$. Se in

... cambio di β si sostituirà il suo

valore $\frac{b^2}{m}$ ci si permetterà

$\therefore e\,7 : def :: 2b^4 : \frac{b^8}{m^4} + \frac{b^6}{m^2} :: 2m^4 : b^4 + b^2m^2$

... area

.35 r.

Le aree $D e T$, $d e f$ si ritrovano nella ragione di $\frac{g}{4} \cdot \overline{B^2 - b^2}$ ad $\frac{h}{4} \cdot \overline{C^2 - c^2}$ la quale non può mai ridursi a quella notata dal G. Jacopo $gB^2 : hC^2$; mentre $B : b$ non è nella stessa proporzione di $C : c$ in diverse spirali.

Passo alla considerazione dei tempi periodici che si impiegheranno da un pianeta, che si movesse nella nostra spirale a ritornare nella linea retta AN dopo compiuta una intera rivoluzione.

Nella stessa spirale quelli tempi t, stanno come le aree BCD, bcd. Ma

$BCD : bcd :: b^2 : B^2$; Dunque

$t : T :: b^2 : B^2$

in diverse spirali dimostra il G. Jacopo supposto che la stessa scala ... essere $t : T :: DeT \sqrt{g^2+1} : def \sqrt{h^2+1}$

Ora $DeT : def :: g \cdot \overline{B^2 - b^2} : h \cdot \overline{C^2 - c^2}$

Dunque $t : T :: \overline{B^2 - b^2} \sqrt{g^2+1} : \overline{C^2 - c^2} \sqrt{h^2+1}$

~~Si ... e la periferia de~~

Tutta la periferia della spirale ABCKD cominciando dal centro A sino all'ordinata $AD = b$ si eguaglia a $b \sqrt{g^2+1}$, e tutta la periferia sino all'ordinata $AT = B$ si eguaglia a $B \sqrt{g^2+1}$.

Perciò avremo il perimetro $DeDT = s = \overline{B - b} \sqrt{g^2+1}$. Nell'altra ... nella spirale abckdl si troverà il ... $def = S = \overline{C - c} \sqrt{h^2+1}$.

Sostituendo nella analogia di sopra invece di $\sqrt{g^2+1}$, $\sqrt{h^2+1}$ i loro valori $\frac{s}{B-b}$, $\frac{S}{C-c}$ ci si ritroverà

t, T

$$t : T :: \frac{\overline{B^2 - b^2} \cdot s'}{B - b} : \frac{\overline{C^2 - c^2} \cdot S'}{C - c},$$

ed eliminando le divisioni,

$$t : T :: \overline{B + b} \cdot s' : \overline{C + c} \cdot S',$$

cioè a dire i tempi periodici in ragione composta delle somme $B+b$, $C+c$ della massima, e della minima distanza, e dei parametri s', S.

Modi di delineare meccanicamente le sezioni del cono.

Modi di delineare meccani=
camente
le Sezioni del Cono

Problema I

Dati due semidiametri conjugati, e la loro posizione, descrivere meccanicamente un'ellissi conica senza prima determinarne gli assi, e i fochi:

Siano (fig. 1) dati di lunghezza, e di posizione i semidiametri $AC = Ca$, e CD. Se Aa se bisogna continuata si conduca per il punto D la normale FDQ, e fatta $DF = AC$, passi per i punti F, C la indefinita FCf: dico che dal punto D della linea QF, la quale si muova in maniera, che il punto Q stia sempre nella linea AC, ed il punto F nella linea Ff, verrà descritta l'ellissi proposta $AINad n$.

La linea QDF sia pervenuta nel sito GIH. Per il punto descrivente I si menino IM parallela a DC, IK parallela ad AC, e dal punto H si lasci cadere sopra AC la normale HL. ~~Pongasi $AC = a$, $ID = \dots$, $CD = b$, $QD = GI = c$, $MC = x$, $MI = y$~~

Giacchè le linee QF, LH sono parallele, verrà questa divisa dalla linea CD in ragione di $QD : DF$, ~~ossia di $c : a$~~. La stessa linea LH è partita dalla linea IK, parallela a GL nella medesima ragione, essendo $GI = QD$, $IH = DF$. Si avrà adunque la conseguenza, che le due rette CD, IK taglieranno la retta LH nello stesso punto K, e che eguagliandosi nei triangoli simili CKL, MID le linee LK, ID, sarà parimente $CK = MI$ ~~$= y$~~. Inoltre siccome le linee IK, MC congiungono le parallele, ed eguali CK, MI, si eguaglieranno fra loro, onde si abbia $IK = MC$ ~~$= x$~~. La similitudine dei triangoli CDQ, CKL ne suggerisce la analogia $CD : DQ :: CK : KL$, da cui si deduce ~~[illegible]~~ il valore di $KL = \frac{DQ \cdot CK}{CD}$. Ma $LK : KH :: QD : DF$ come ~~[illegible]~~ ovvero, dunque $KH = \frac{DF \cdot CK}{CD} = \frac{AC \cdot MI}{CD}$. Essendo pertanto nel triangolo rettangolo IKH $IH = AC$, $IK = MC$, $KH = \frac{AC \cdot MI}{CD}$, avremo $\overline{AC}^2 - \overline{MC}^2 = \frac{\overline{AC}^2 \cdot \overline{MI}^2}{\overline{CD}^2}$, equazione all'ellissi, i cui semidiametri conjugati AC, CD. Il che ec.

Corollario

Per ben intendere il movimento della linea QF, immaginiamola primieramente collocata lungo la linea Ca, in modo che il punto F cada in C, il punto D in A, e si sovrappongano le linee eguali FD, CA. Viaggi adesso il punto F per la linea

CF

CZ da C verso Z, ed il punto Q per la linea gf da g verso f, e giunto che sia il punto Q in C, il punto D coinciderà col punto S, e sarà CS = QD ec. Continuando il lavoro [illegible] i punti Z, Q, arriverà la linea QZ nella posizione QZ normale a gf, che è segnata nella figura. Il sito Z è il limite estremo, oltre cui non può arrivare il punto Z. Mentre il punto Q seguita a muoversi da g verso f, il punto Z torna indietro da Z verso C. La posizione QR della linea QZ, che sia normale a CZ, determina l'ultimo vertice f, a cui può giungere il punto Q. Dopo ciò i punti Z, Q vengono quello da Z verso C, questo da f verso g, e avvenuto finalmente il punto Z in C, ed il punto Q in g si è compita la descrizione della mezza ellisse A ? S D V a. Sarà superfluo il parlare della descrizione dell'altra mezza ellisse sopra a ? A, essendo analoga a quella, che io già spiegata della mezza ellisse superiore.

Problema II

Dati due semidiametri eguali coniugati, e la loro posizione, descrivere meccanicamente una Iperbola equilatera senza previa determinazione gli assi, ed i fuochi

Sia C il centro dell'Iperbola, ed i due semidiametri eguali CA, CD formino l'angolo dato ACD. Si continui da ambe le parti verso H, h indefinitamente la linea CD, e così ancora la CA verso B. Si tagli la linea AB, che quanto sarà più lunga, altrettanto permetterà di descrivere una maggior porzione di Iperbola, e per il punto B si faccia passare la linea kK parallela ad hH. Condotta al punto B della retta kK la normale BQ = AC, si leghi ad un chiodo piantato in Q il filo QZ?, la cui lunghezza sia eguale a quella della linea BC. La squadra zoppa GZK, il cui angolo GZK pareggi il ∠ CA si muova lungo la linea AK, ed ZG sia una tavola, nella quale inserito un matitatojo [legato alla estremità del filo QZ] possa segnare nel sottoposto piano l'Iperbola. [illegible] il [illegible] filo per il punto fisso in Q, mentre la squadra zoppa GZK si muove in A verso K, il punto descrivente Z ~~muggon~~ [illegible] da G verso Z, e segna la proposta iperbola AZL.

Si tiene per la proprietà del triangolo rettangolo QBZ $\overline{QZ}^2 - \overline{KZ}^2 = \overline{BZ}^2$: ma BQ = AC, BZ = CG, ed QZ = GZ, ne viene

essendo

essendo eguale il lato CDG alla linea DG; detratta la porzione comune DF, sarà AD = GD; dunque $GD^2 - AC^2 = CG^2$, ed equazione all'Iperbola equilatera, i cui semidiametri coniugati eguali ad AC: il che ec.

Corollario

L'altro ramo dell'Iperbola A il si descriverà, facendo scorrere la squadra sopra GDK lungo la linea EL.

Problema III

Dati i due semi assi coniugati, e conseguentemente anche i fuochi descrivere meccanicamente un'Iperbola Apolloniana.

Sia C il centro dell'Iperbola; CA = Ca, CB = Cb i due semi-assi coniugati. Si troveranno i due fuochi F, f, segnando CF = Cf = AB. Normale ad Ff si conduca, per il centro C la retta CQ, lungo cui si segni un canale CQ, pel quale possa scorrere il chiodo Q. Prendansi due fili QFfQ, che passi per due anelli fissi F, f, le cui estremità Q si leghino al chiodo Q, e fermato il matitatojo nel punto A, si tiri allo punto A, e si faccia, che il chiodo Q scorra da Q verso C. Sia il punto C pervenuto in a, ed il punto A in D, ed avverrà, che i due fili FDa, fDa siano egualmente tese, il punto D apparterrà alla proposta Iperbola ADQ.

Nei triangoli rettangoli QCF, QCf, essendo CF = Cf, e Cq comune, sarà ancora QF = Qf. Per la stessa ragione avverrà aF = af. Descritti adunque coi due raggi Fa, le due porzioni di circolo aG, ag, sono eG, eg sono le eguali lunghezze, per cui, essendosi mosso il chiodo in Q in a, si sono accorciate le fila essendosi mosso il chiodo in a ... allungate le fila FA, fA divenendo aD, aD, e conseguentemente allungate le fila FA, fA divenendo aD, ad. Ma le fila FA, fA differiscono per l'asse eguali ad FD, fD. Ma le fila FA, fA differiscono per l'asse Aa, dunque è medesima differenza passa fra le fila FD, fD, dunque è nota trasversale dell'Iperbola: il che ec.

Problema IV.

Dato il parametro, ~~[illegible]~~ relativamente all'asse, descrivere una Parabola conica.

Condotte a squadra (fig. 4) le due linee DB, BC, taglio BH eguale alla metà del parametro della Parabola da descriversi, e la divido col punto A in due parti eguali. Per il punto C, che quanto sarà più lontano dal punto B, tanto una maggiore porzione di Parabola descriveremo, delineo CK parallela a BD. Preparo poscia una squadra BCK, che lungo il lato CB abbia una fessura, in cui possa inserirsi un sottile matitatojo A. Al punto C della squadra, ed al punto immobile

immobile H situato nello stesso piano lego un filo CAH, la cui lunghezza sarà eguale ad CB. Mosso il lato CK della squadra QCR lungo la linea CK da C verso K, il filo trarrà da A verso C il matitatoio A, il quale discendendo per la tenenza AC, disegnerà nel sottoposto piano la parabola ricercata.

Sia la squadra giunta nel sito OGK, il matitatoio in I, ed il filo nella positura GIH. Giacchè GIH = CB = GO, sottratta la comune GI, resterà IH = IO giusta la nota proprietà della parabola, al di sopra del cui vertice A segnata nell'asse AB continuato la linea AB eguale alla quarta parte del parametro, e conseguentemente alla distanza HA del foco H dal vertice della curva, e menata pel punto B la retta BD normale all'asse, e pel punto qualunque I della curva la linea IO parallela ad CB; ed IH, sono sempre una linea, fra loro eguali.

Problema V

Dati i due semiassi coniugati descrivere organicamente un'Iperbola Apolloniana, adattando ad essa l'artifizio usato in riguardo alla Parabola.

I due semiassi (fig. 5) CD, DH formino l'angolo retto CDH, e tirata pei punti C, H la indefinita CM, sia essa l'asse dell'Iperbola, C il centro, H il foco. Menata DB normale a CH, HB normale a DH, le quali si intersechino nel punto B, sarà BH eguale alla metà del parametro della nostra curva, la quale BH si seghi per metà nel punto A. Per il punto C distante quanto basta dal punto B si conduca CK parallela a BD; e adattata una squadra zoppa all'angolo BCK, ed aperta nel lato CB la fenestra CB, lego come sopra al punto C della squadra, ed al punto immobile H il filo CAH = CB. Movendo la squadra lungo la linea CK da C verso K, il matitatoio A descriverà la proposta Iperbola AIZ, in cui sarà sempre IH = IO. Per il punto I si conduca LIM parallela a DB, e conseguentemente normale a CM.

Conciossiachè IO = LD = IH, sarà $\overline{LD}^2 = \overline{IH}^2 = \overline{IM}^2 + \overline{MH}^2$; ma LD = CL − CD, e perciò $\overline{LD}^2 = \overline{CL}^2 - 2LCD + \overline{CD}^2$; MH = CM − CH, e perciò $\overline{MH}^2 = \overline{CM}^2 - 2MCH + \overline{CH}^2$; dunque $\overline{CL}^2 - 2LCD + \overline{CD}^2 = \overline{IM}^2 + \overline{CM}^2 - 2MCH + \overline{CH}^2$. I triangoli simili LCM, HCD somministrano le analogie LC : CM :: CH : CD, da cui si deduce l'eguaglianza dei rettangoli LCD, MCH. Ma è ancora $\overline{CH}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DH}^2$. Levando adunque da ambo le parti quantità eguali,

resterà

[illegible] $CL^2 = IM^2 + CM^2 + DH^2$, o sia $CL^2 - CM^2 = IM^2 + DH^2$. Ma $CL^2 - CM^2 = LM^2$, ed essendo $CD : DH :: CM : LM$, $LM = \frac{DH}{CD} \cdot CM$; dunque $\frac{DH^2}{CD^2} \cdot CM^2 = IM^2 + DH^2$, la quale esprime l'equazione all'Iperbola, i cui semiassi CD, DH, C il centro, ed H il fuoco: il che [illegible]

Corollario I

Relativamente alle linee CB, BD, di cui ho determinata la posizione, si verifica anche nell'Iperbola la proprietà, che sieno eguali le linee IH, IO, una condotta dal punto I della curva al fuoco H, e l'altra dal detto punto I parallela ad CB sino alla linea BD.

Corollario II

La linea CK è un asintoto della nostra Iperbola. Infatti nel triangolo isoscele OIH essendo eguali gli angoli IOH, IHO, e divenendo retto l'angolo IOH, quando il punto O è giunto in D, e la linea OH coincide colla DH, e la OI si congiunge alla DK, è retto in tal incontro anche l'angolo IHO, e le linee parallele HI, DKI si uniscono in un punto I ~~collocato~~ infinitamente distante dal punto D.

Scolio.

In riguardo all'ellissi la linea BD fig.ª 4.5 si tramuta in un semicircolo fig.ª 6 BQD descritto col raggio CB eguale all'asse maggiore Aa di detta ellissi, e la linea fig.ª 4.5 CK si raccoglie tutta fig.ª 6 nel punto C. La linea CH, che è la distanza tra i due fuochi C, H, si eguaglia alla radice quadrata della differenza dei quadrati degli assi maggiore e minore e nel punto medio I della linea HC è collocato il vertice dell'ellissi AIa, e ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ [illegible] e nel mezzo E della linea HD il punto infimo della medesima ellissi. [illegible] condotto dal fuoco C entro del circolo BQD, raggio CQ, che tagli i[illegible] in un punto I e menata da questo punto all'altro fuoco H la retta HI, sarà sempre IH = IQ, e conseguentemente CIH = CQ = asse maggiore dell'ellissi. Quindi legato ai fuochi C, H, il filo CIH = CQ = Aa, si disegna col metatolo l'ellissi AIa, conforme è noto.

264

Aggiunta da farsi dopo il Problema III

In altra maniera

Un regolo DH (fig. 3) si giri intorno il fuoco D, ed DH sia una fessura, lungo la quale possa scorrere il matitatojo P. Prima che cominci il giro, il regolo DH si sovrapponga alla linea DA, e il punto P coincida col punto A. In questa posizione si leghi un filo al fuoco F, e tenendolo passare pel matitatojo A, si leghi al punto H del regolo, che quanto sarà più lontano dal fuoco D, tanto una maggior porzione di Iperbola descriveremo. Sia pervenuto il regolo nel sito DH, ed il filo FPH ~~ecco~~ spingendo il punto matitatojo P da D verso H, avrà fatto sì che esso matitatojo descriva l'iperbola AP. Si segni DK = DA.

Mentre il regolo DH stava sopra la linea DF, fra le linee DA, FA condotte dai fuochi D, F al vertice A della curva si passava la differenza Aa eguale all'asse trasverso. ~~Quando~~ Giunto il regolo ~~giunto~~ nella posizione DH, il filo FA si è allungato per la porzione KP, e perciò FA + KP = FP: ma DA + KP = DP; dunque fra le linee DP, FP, e fra le linee DA, FA si passa la stessa differenza costante Aa, e per conseguenza AP è un'Iperbola.

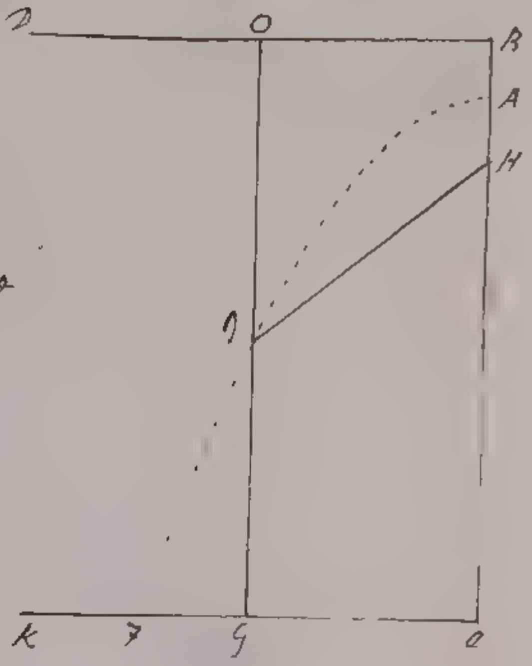


Fig A

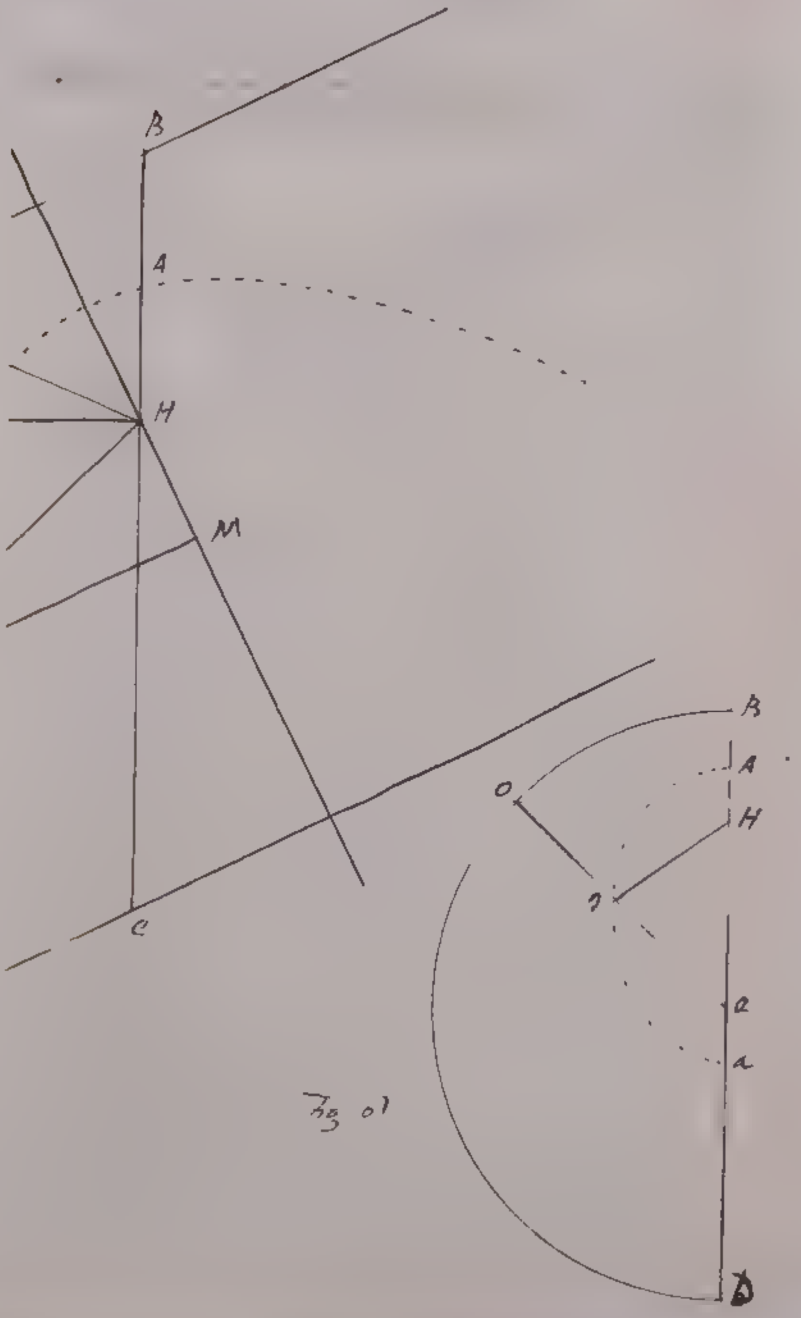


Fig 01

Dissertazioni, e scritti
Analitici

Soluzione della difficoltà proposta dal Rollio intorno al metodo di ritrovare le radici delle equazioni del terzo, e del quarto grado col mezzo di due sezioni coniche, che si toccano, o si intersecano.

Il Co. Vincenzo Riccati mio fratello scioglie adequatamente la difficoltà proposta dal Rollio intorno al metodo di determinare le radici delle equazioni del terzo, e del quarto grado col mezzo delle intersecazioni delle curve. Veggasi il Cap. X. T. I. Lib. II. delle Istituzioni Analitiche. Rifletteva il Rollio, che quantunque l'equazione sia fornita di radici reali, si danno dei casi, nei quali il nominato metodo, o non ne dà alcuna, o non le dà tutte. Per liberarlo da ogni difficoltà, divide l'Ab. Vincenzo le formole in diverse classi, e trattando di ciascuna ordinatamente, stabilisce in quali incontri le ordinate uguali riescano reali, o immaginarie. Se sono reali, le curve si toccano, o s'intersecano, e se immaginarie non succede contatto, o intersecazione.

Acciocchè il detto metodo ci dia le bramate intersecazioni, o contatti, egli è d'uopo in cambio d'una funzione di x sostituire una tale funzione di y, che questa nuova incognita non possa mai divenire immaginaria, quando la x è reale. S'ottiene ciò ponendo $x^2 = ay$, equazione alla parabola, in cui ad x reale corrisponde sempre y reale. Fatta la sostituzione, ne nasce un'altra equazione espressa per x, e per y. Se le due curve si hanno da toccare, o da intersecare, ad un dato valore di x deve riferirsi in entrambe un eguale valore di y: ma questo nella parabola è sempre reale; dunque deve esser tale anche nell'altra curva, e perciò se la formola proposta contiene radici reali, le due curve devono necessariamente o toccarsi, o tagliarsi.

Comincio dal considerare l'equazione del secondo grado $x^2 - x.\overline{a+b} + ab = 0$ proposta da mio fratello. Fatta $x^2 = a^2 - y^2$; ed effettuata

la

la sostituzione, perviene alla formola $\overline{a+b}\cdot\overline{a-x} = y^2$. La prima di queste equazioni è al circolo, e la seconda alla parabola. Col raggio $AC = a$ (fig. 1.) descrivasi il circolo DAD', ed indi col parametro $a+b$ al vertice A la parabola. Se $a > b$, la parabola $DGAG'D'$ a principio cade dentro del circolo, e toccandolo nel punto A, lo taglia nel punto D, dimodochè ci somministra le due radici dell'equazione $x = CA = a$, $x = CE = b$

Ma se $a < b$, la parabola FAF' cade fuori del circolo, e determina la sola radice $x = CA = a$. Il difetto consiste nella sostituzione $x^2 = a^2 - y^2$, posta la quale y può essere immaginaria, mentre x è reale. Dispongo le due equazioni così $a^2 - x^2 = y^2$, $a^2 + ab - ax - bx = y^2$, onde si abbia $a^2 - x^2 = a^2 + ab - ax - bx$, e quindi

l'equazione proposta $x^2 - ax - bx + ab = 0$, e supplendo al quadrato, $x^2 - \overline{a+b}\cdot x + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$, ed estraendo la radice, $x - \frac{a+b}{2} = \begin{cases} \frac{a-b}{2} \\ -\frac{a+b}{2} \end{cases}$, da cui si raccoglie $x = \begin{cases} a \\ b \end{cases}$, che sono le due radici della proposta equazione. Sostituisco questi valori nelle due formole $a^2 - x^2 = y^2$, $\overline{a+b}\cdot\overline{a-x} = y^2$, e mi si presenta $y^2 = \begin{cases} 0 \\ a^2 - b^2 \end{cases}$, e per conseguenza $y = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{a^2 - b^2} \end{cases}$. Il primo di questi valori è sempre reale, e perciò le due curve determinano sempre la radice reale $x = a$. Il secondo valor è reale, quando $a > b$, ed in questo caso le due curve danno anche la radice $x = b$. Che se $a < b$, il detto valor è immaginario, ed il circolo e la parabola non si tagliano, nè somministrano la radice $x = b$. In tal circostanza nelle formole $a^2 - x^2 = y^2$, $\overline{a+b}\cdot\overline{a-x} = y^2$ bisogna cangiare i segni, onde si abbia $x^2 - a^2 = y^2$, $\overline{a+b}\cdot\overline{x-a} = y^2$. La prima di tali equazioni è all'

iperbola

iperbola, la seconda alla parabola. Nell'asse CE (Fig. 2.) si segni $CA = a$, $CE = b$, e col vertice in A si descrivano l'iperbola AGD, e la parabola AFD corrispondenti alle due sovrascritte equazioni; fatta $x = a$, troveremo in entrambe $y = 0$, e ponendo $x = b$, ne risulta in amendue le curve $y = \sqrt{b^2 - a^2}$. Le dette curve adunque determinano le due radici dell'equazione $x^2 - x \cdot \overline{a+b} + ab = 0$, cioè $x = a$ toccandosi nel punto A, ed $x = b$ intersecandosi nel punto D, e ciò nell'ipotesi di $a < b$.

Nella stessa supposizione la costruzione ci darebbe le due radici a, b, sostituendo nella formola $x^2 - x \cdot \overline{a+b} + ab = 0$ in cambio di x^2 la grandezza $b^2 - y^2$, onde ne risultino le due formole, $x^2 = b^2 - y^2$ al circolo, $\overline{b-x} \cdot \overline{a+b} = y^2$ alla parabola. All'asse CE (Fig. 3.) col raggio $CE = b$ descrivo il circolo EFDE'D'F'E, e poscia col vertice in E la parabola DGEG'D' relativa all'equazione $\overline{a+b} \cdot \overline{b-x} = y^2$. Le due curve si toccano nel punto E, e determinano $CE = x = b$. In fatti surrogato questo valore nelle due formole, ne risulta $y = 0$. Succede inoltre, che fatta $CA = a$, l'ordinata $AD = y$ sia comune ad ambe le curve, le quali per conseguenza si tagliano nel punto D. E veglia il vero, posta $CA = x = a$, si trova in ambe le formole $AD = y = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Si costruirebbe con sicurezza di buon esito la nostra formola $x^2 - x \cdot \overline{a+b} + ab = 0$, facendo $x^2 = ay$, onde se x è reale, non possa mai y essere immaginaria. Effettuata la sostituzione, si scopre $a \cdot \overline{b+y} = \overline{a+b} \cdot x$; e quindi l'analogia $a : a+b :: x : b+y$. Segno a squadra (Fig. 4.) la linea $CE = a$, $ED = a+b$, e pei punti C, D tiro la diagonale CD. Descrivo $CA = b$ parallela ad ED, ed indi AH parallela a CE, ed all'asse AH, col parametro $AH = a$ delineo la parabola AGD,

la cui equazione $x^2 = ay$, la quale taglia la diagonale AD nei due punti G, D corrispondenti a $CA = x = b$, a $CE = x = a$, che sono le radici della proposta equazione. E per verità mettendo nelle due formole $x^2 = ay$, $ab + ay = \overline{a+b}.x$ b in luogo di x, si trova in entrambe $FG = y = \frac{b^2}{a}$, e facendo $x = a$, si scopre in amendue $HD = y = a$.

Col mezzo pertanto dei descritti artifizj, e specialmente dell'ultimo, il contatto, o l'intersecazione delle curve determinerà le due radici reali competenti ad un'equazione del secondo grado, nè io sopra ciò maggiormente mi fermo.

Passo dunque a considerare l'equazioni del terzo grado. All'equazione $x^3 - px \pm q = 0$ si può ridurre qualunque formola del terzo grado. Trovate le radici della formola $x^3 - px \pm q = 0$, saranno altresì date le radici della formola, da cui è derivata, differendo i due termini di radici per una quantità costante. Inoltre le due formole $x^3 - px + q = 0$, $x^3 - px - q = 0$ sono fornite della medesima radice, ma affette con segni contrarj. Per la qual cosa basta il rivolgere le riflessioni alla sola formola $x^3 - px + q = 0$. Contenga questa le tre radici reali $x = \begin{cases} a \\ b \\ -a-b \end{cases}$, onde si abbia $x^3 - \overline{a^2 + ab + b^2}.x + ab.\overline{a+b} = 0$. Pongo $x^2 = ay$ equazione alla parabola, e ne proviene $axy - \overline{a^2 - ab - b^2}.x + ab.\overline{a+b} = 0$, ovvero $\overline{a + b + \frac{b^2}{a} - y}.x = b.\overline{a+b}$ equazione all'iperbola fra gli assintoti. In tali formole ad x reale corrisponde sempre y reale. All'asse DAC (Fig. 5.) col parametro $AC = a$, ed il vertice in A si delinei la parabola FEAG adattata all'equazione $ay = x^2$, le cui coordinate $AB = x$, $BE = y$. Segnata $AH = a + b + \frac{b^2}{a}$, tiro PHL

parallela

parallela a DC, e fra gli assintoti HL, HA; HP, HO descrive i due rami d'iperbola IEFK, NGM corrispondenti alla equazione $\overline{a+b+\frac{b^2}{a}-y}\cdot x = b\cdot\overline{a+b}$. Tagliata $HQ = x$, e condotta QA parallela ad HA, sarà $QE = QA - AE = a+b+\frac{b^2}{a}-y$, dimodochè HQ, QE saranno le due coordinate dell'iperbola. I due rami AEF della parabola, KFEI dell'iperbola si taglieranno nei punti E; F relativi alle assisse $AA = b$, $AC = a$, il che succede soltanto, quando $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$. Che se $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$, ne segue essere $b = a$, e congiungendosi i punti A, C; E, F, le due curve si toccano. Supposto finalmente $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$, i due rami nè si tagliano, nè si toccano, e le due radici divengono immaginarie. Resta che si considerino i due rami, AG della parabola, MGN dell'iperbola, i quali sempre si tagliano in un punto G, e somministrano la radice $AD = x$. Colla parabola, e colla iperbola fra gli assintoti adunque si determineranno sempre le radici reali delle equazioni del terzo grado. Sostituiti nelle due formole $x^2 = ay$, $\overline{a+b+\frac{b^2}{a}-y}\cdot x = b\cdot\overline{a+b}$ in cambio di x i valori: $b = AA$, $a = AC$, $-a-b = AD$, si troverà appartenere ad ambe le curve la stessa ordinata $AE = y = \frac{b^2}{a}$, $CF = y = a$, $DG = y = \frac{a^2+2ab+b^2}{a}$, il che è una conseguenza delle intersecazioni delle due curve.

Mi inoltro a prender per mano le equazioni del quarto grado. Do principio da quella proposta da mio fratello $x^4 - bx^3 - 4b^3x^2 - 4b^3x + 16b^4 = 0$, che contiene due radici reali uguali $x = 2b$. Dalla $\frac{4b^2 - x^2}{2b - x} = -y$, perviene alle due equazioni $x^2 - 2by + y^2 = 0$ al circolo, $4b^2 - xy + y^2 = 0$ all'iperbola. La detta sostituzione è

difettosa

difettosa; perchè ad un valore reale di x può riferirsi un valore immaginario di y. Posta $x = 2b$, avremo $\frac{0}{0} = -y$, grandezza, che può essere immaginaria, ed in fatti in tal ipotesi scopriremo $y = b \pm \sqrt{-3b^2}$. Benchè le mentovate curve non si intersechino, nè si tocchino, nulladimeno l'equazione proposta ha due radici reali $x - 2b = 0$. E di vero sostituito in cambio di x il valore $2b$, l'equazione si annulla, ed essendo essa divisibile per $x^2 - 4bx + 4b^2 = 0$, ne risulta il quoziente $x^2 + 3bx + 4b^2 = 0$, che risolto mi dà le due radici immaginarie $x = -\frac{3}{2}b \pm \sqrt{-\frac{7}{4}b^2}$ della nostra equazione. Dalla formola del circolo si deduce $y = b \pm \sqrt{b^2 - x^2}$, e da quella dell'iperbola $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 4b^2}$. Sono eguali tali valori, quando $x = 2b$, trovandosi e per l'una, e per l'altra formola l'ordinata immaginaria $y = b \pm \sqrt{-3b^2}$. Ciò significa, che si tagliano i rami immaginarj del circolo, e dell'iperbola, e che ad ambe le intersecazioni conosciute soltanto dall'analisi, e non dalla geometria si riferisce l'assissa reale $x = 2b$.

Acciocchè le due radici reali $x - 2b = 0$ vengano somministrate dalla geometria, mi servo primieramente dell'artificio di cangiare in reali i valori di y, onde si abbia $y = b \pm \sqrt{x^2 - b^2}$, $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4b^2 - \frac{1}{4}x^2}$. Tra questi valori si dà eguaglianza, quando $x = 2b$, ed essendo la prima formola all'iperbola $(y-b)^2 + b^2 = x^2$, e la seconda all'ellissi $(y - \frac{1}{2}x)^2 = 4b^2 - \frac{1}{4}x^2$, a due intersecazioni di tali curve corrisponde l'assissa $x = 2b$.

Poichè $b \pm \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4b^2 - \frac{1}{4}x^2}$, ovvero $b - \frac{1}{2}x = \mp\sqrt{x^2 - b^2} \pm \sqrt{4b^2 - \frac{1}{4}x^2}$, avremo quadrando

b^2

$b^2 - bx + \frac{1}{4}x^2 = -2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{4b^2-\frac{1}{4}x^2} + x^2 - b^2 + 4b^2 - \frac{1}{4}x^2$, ossia $2b^2 + bx + \frac{1}{2}x^2 = 2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{4b^2-\frac{1}{4}x^2}$. Tornando a quadrare, e trovo $4b^4 + 4b^3x + 3b^2x^2 + bx^3 + \frac{1}{4}x^4 = -16b^4 + 17b^2x^2 - x^4$; e per conseguenza $\frac{5}{4}x^4 + bx^3 - 14b^2x^2 + 4b^3x + 20b^4 = 0$, equazione bensì diversa dalla proposta, ma che con essa conviene nel contenere due radici reali $x - 2b = 0$. Dividendo tal equazione per $x^2 - 4bx + 4b^2 = 0$, ne nasce il quoziente $\frac{5}{4}x^2 + 6bx + 5b^2 = 0$, ossia $x^2 + \frac{24bx}{5} + 4b^2 = 0$, da cui si deducono altre due radici reali $x + \frac{12}{5}b \pm \frac{2}{5}b\sqrt{11} = 0$.

Costruisco primieramente la formola $(y - \frac{1}{2}x)^2 = 4b^2 - \frac{1}{4}x^2$ all'ellissi. Sia il semidiametro maggiore (fig. 6.) $CD = CD' = 4b$. Tagliata $CF = 2b$, formo il triangolo isoscele FCE, la cui base $FE = b$. Condotta KCK' parallela ad FE, sia $CK = CK' = 2b$ il semidiametro minore dell'ellissi. Se $CF = CE = x$, sarà $FG = y - \frac{1}{2}x$, ed $EG = y$, dimodochè CE, EG saranno le due coordinate all'ellissi relative alla formola $(y - \frac{1}{2}x)^2 = 4b^2 - \frac{1}{4}x^2$.

Per costruire la formola $(y - b)^2 + b^2 = x^2$ all'iperbola, pel punto F tiro $FAIA'$ parallela ad EC, e segnata $IA = IA' = b$, delineo i due rami iperbolici GAH, $G'A'H'$ corrispondenti alla detta formola, riguardo ai quali sarà $IF = x$, $FG = y - b$, e per conseguenza $CE = x$, $EG = y$. Tagliata $CE = x = 2b$, e condotta $HEFG$, le due curve si taglieranno nei punti H, G, e queste due intersecazioni determineranno la doppia radice $CE = x = 2b$ comune colla proposta equazione del quarto grado. Le altrettante intersecazioni nei punti H', G' somministrano le radici $CE'' = x = -\frac{12}{5}b - \frac{2}{5}b\sqrt{11}$, $CE' = x = -\frac{12}{5}b + \frac{2}{5}b\sqrt{11}$, che non convengono alla proposta equazione.

Il descritto artificio adunque consiste nel trasformare la proposta equazione in un'altra contenente le due radici $x = ab$, che colla costruzione si possono geometricamente ottenere.

Per servire alla semplicità, faccio svanire il secondo termine nella proposta equazione, il che si ottiene ponendo $x = z + \frac{1}{4}b$. Effettuata la sostituzione, ne nasce

$z^4 - \frac{706b^2z^2}{101} - \frac{946b^3z}{101} + \frac{37736b^4}{(101)^2} = 0$, equazione che ha le quattro radici minori di quelle della proposta per $\frac{1}{4}b$, laonde trovata l'una, sono note ancor l'altre. Mi servo della sostituzione $z^2 = \frac{by}{4}$, che non può condurre ad inganno, e scopro $\frac{b^2y^2}{101} - \frac{706b^3y}{101\cdot 4} - \frac{946b^3z}{101} + \frac{37736b^4}{(101)^2} = 0$, e dividendo per $\frac{b^2}{101}$, $y^2 - \frac{706by}{4} + \frac{37736b^2}{101} = 9$ [illegible] ossia $(y - \frac{35b}{4})^2 = 946bz - \frac{25\cdot 446b^2}{101} = 946b\cdot(z - \frac{13b}{4})$. Abbiamo dunque due equazioni alla parabola, cioè $\frac{1}{4}b\cdot y = z^2$, $946b\cdot(z - \frac{13b}{4}) = (y - \frac{35b}{4})^2$, dalle quali soggiungo la costruzione.

All'asse A'A (fig. 7.), col vertice in A delineo la parabola FEAE'F' propria dell'equazione $\frac{1}{4}by = z^2$, la cui ascissa AB = z; e la ordinata AF = y. Segue poscia AD = $\frac{35b}{4}$, e nell'asse DH parallelo ad A'A tagliata DC = $\frac{13b}{4}$, col vertice in C descrivo la parabola ICF confacente alla formola $946b\cdot(z - \frac{13b}{4}) = (y - \frac{35b}{4})^2$. Data AB = z = $\frac{7}{4}b$, sarà l'ordinata BF = y = $\frac{49b}{4}$ comune alle due curve, che si toccheranno nel punto F, ed equivalendo il contatto a due punti, determineranno le due radici eguali $z = \frac{7}{4}b$ competenti all'equazione

$z^4 - \frac{706b^2z^2}{101} - \frac{946b^3z}{101} + \frac{37736b^4}{(101)^2} = 0$, che calano per $\frac{1}{4}b$ da quelle dell'equazione proposta. Che le due parabole si tocchino nel punto F, si rende

manifesto

manifesto da ciò, che in qualunque altro sito l'ordinata DE alla parabola AEF è minore dell'ordinata DC alla parabola ICF. Posta $AD = \frac{35}{4}b$, sarà $DC = \frac{13}{4}b > DE = b\sqrt{\frac{35}{181}}$. Di questa verità ecco la rigorosa dimostrazione. Sia AM la metà di AB, e condotta la FM, toccherà essa la parabola FEAE'F' nel punto F. Per i triangoli simili FAM, FKN abbiamo $FA = \frac{49b}{4} : AM = \frac{7b}{4} :: FK = \frac{14b}{4} : KN = \frac{2}{4}b$; ma $CK = DK - DC = \frac{17b}{4} - \frac{13b}{4} = \frac{4}{4}b$; dunque anche $NC = \frac{2}{4}b$, e perciò MNF tocca altresì la parabola ICF nel punto F. Il perchè le due parabole, che hanno nel punto F la tangente comune, scambievolmente si toccano; il che &c.

Coll'esposto artificio si costruiscono tutte l'equazioni del quarto grado. Aggiungo alcuni esempj, e comincio dall'equazione $x^4 - 15b^2x^2 + 10b^3x + 24b^4 = 0$, ch'è fornita delle quattro radici reali

$$x = \begin{cases} 3b \\ 2b \\ -b \\ -4b \end{cases}$$

Pongo $x^2 = by$, ed effettuata la sostituzione trovo $b^2y^2 - 15b^3y + 10b^3x + 24b^4 = 0$, e dividendo per b^2
$y^2 - 15by + 10bx + 24b^2 = 0$, ovvero
$y^2 - 15by = -10bx - 24b^2$, e supplendo al quadrato, $(\pm y \mp \frac{15b}{2})^2 = \frac{129b^2}{4} - 10bx = 10b.(\frac{129b}{40} - x)$. L'equazioni scoperte sono a due parabole, e si costruiscono così.

All'asse (fig. 16.) AB''', col parametro $= b$, e vertice in A descrivo la parabola C'CAC''C''', le cui coordinate $AB = y$, $BC = x$. Segnata $AE = \frac{15b}{2}$, tiro F''ED parallela alla ordinata BC, e faccio $ED = \frac{129b}{40}$, ed indi all'asse DF''', col vertice in D, e col parametro $10b$ delineo la parabola C''CDC'C''', le coordinate della quale $DF = \frac{129b}{40} - x$, $FC = \frac{15b}{2} - y$. Si intersecano queste parabole nei quattro punti C, C', C'', C''', e determinano le quattro radici della nostra equazione $BC = x = 2b$, $B'C' = x = 3b$, $B''C'' = x = -b$, $B'''C''' = x = -4b$: ed in fatti sostituito qualunque di questi quattro valori in luogo di x nelle due formole $x^2 = by$, $(\pm y \mp \frac{15b}{2})^2 = \frac{129b^2}{4} - 10bx$, si troverà che la stessa ordinata compete ad amendue le curve, il punto estremo della quale per conseguenza è ad entrambe comune.

Spettano all'equazione $x^4 - 9a^2x^2 + 4a^3x + 12a^4 = 0$ le quattro radici $x - 2a = 0$, $x - 2a = 0$, $x + a = 0$, $x + 3a = 0$, tra le quali la prima, e la seconda sono eguali. Pongo al solito $x^2 = ay$, e dopo la sostituzione trovo $a^2y^2 - 9a^3y + 4a^3x + 12a^4 = 0$, e dividendo per a^2, e supplendo al quadrato, $y^2 - 9ay + \frac{81}{4}a^2 = \frac{33}{4}a^2 - 4ax = 4a\cdot(\frac{33}{16}a - x)$. All'asse AE (fig. 9.), col parametro $= a$, e col vertice in A si delinei la parabola $BAB'B''$, le coordinate della quale $AC = x$, $CB = y$. Si tagli poscia $AG = \frac{9a}{2}$, e si tiri $F''GH$ parallela a $C''C$, e fatta $GD = \frac{33}{16}a$, col vertice in D, e col parametro $= 4a$ si descriva la parabola $B''DBB'C''$, le cui coordinate $DF = \frac{33a}{16} - x$, $FB = \frac{9a}{2} - y$. Determinata $AC = 2a$, l'ordinata $CB = y = 4a$ sarà comune ad ambe le parabole, che si toccheranno nel punto B. E vaglia il vero, tagliata AC per metà nel punto I, e condotta BI, toccherà questa la parabola $BAB'B''$ nel punto B. Ora essendo $BC = 4a : CI = a :: BF = \frac{1}{2}a : FH$, si scopre $FH = \frac{1}{8}a$: ma $FD = \frac{1}{16}a$; dunque anche $DH = \frac{1}{16}a$, e perciò IBH è altresì tangente della parabola $B''DB'C''$. E perchè il contatto equivale a due punti, ci dà esso la doppia radice $AC = 2a$. Alle ascisse $AC' = -a$, $AC'' = -3a$ corrispondono le ordinate $C'B' = a$, $C''B'' = 9a$, che sono comuni ad ambe le parabole, le quali si tagliano nei punti B', B''.

L'equazione $x^4 - 5a^2x^2 + 10a^3x - 6a^4 = 0$ contiene le quattro radici $x - a = 0$, $x + 3a = 0$, $x - a - a\sqrt{-1} = 0$, $x - a + a\sqrt{-1} = 0$, due reali, ed altrettante immaginarie. Faccio $x^2 = ay$, e la sostituzione mi dà $a^2y^2 - 5a^3y + 10a^3x - 6a^4 = 0$. Divido per a^2, e perfeziono il quadrato, onde si abbia $y^2 - 5ay + \frac{25}{4}a^2 = \frac{49}{4}a^2 - 10ax =$

10a

$10a\cdot(\frac{49}{40}a-x)$ equazione alla parabola. All'asse AG (fig. 10.), col parametro $=a$, e col vertice in A descrivo la parabola EBAB' le coordinate della quale $AC=x$, $CB=y$, e taglia-ta $AG=\frac{5}{2}a$, e condotta pel punto G la F'E parallela a C'AC, segno $GD=\frac{49}{40}a$. Col vertice in D, col parametro $=10a$, ed all'asse DF' delineo la parabola A'DAH, che avrà per coordinate $DF=\frac{49}{40}a-x$, $FA=\frac{5}{2}a-y$. Le due parabole si tagliano in due punti B, B' relativi alle assisse $AC=a$, $AC'=-3a$, e le due ordinate $CB=a$, $C'B'=9a$ sono ad entrambe comuni. Alle assissa immaginarie $a+a\sqrt{-1}$, $a-a\sqrt{-1}$ corrisponde per le equazioni delle due parabole la stessa y immaginaria, cioè $y=2a\sqrt{-1}$, $y=-2a\sqrt{-1}$. Le intersecazioni adunque spettano ai rami immaginarj delle due curve, che dalla geometria non sono conosciuti.

Finisco coll'esempio dell'equazione $x^4+3a^2x^2-6a^3x+10a^4=0$, le cui radici $x-a-a\sqrt{-1}=0$, $x-a+a\sqrt{-1}=0$, $x+a+a\sqrt{-1}=0$, $x+a-a\sqrt{-1}=0$ sono tutte immaginarie. Stabilisco $x^2=ay$, e sostituendo trovo $a^2y^2+3a^3y-6a^3x+10a^4=0$ e fatta la divisione per a^2, la formola si riduce alla seguente $y^2+3ay+\frac{9}{4}a^2=6ax-\frac{31}{4}a^2=6a\cdot(x-\frac{31}{24}a)$, che è alla parabola. All'asse GE (fig. 11.), col vertice in A, e col parametro $=a$ descrivo la parabola IAAI', le cui coordinate $AC=x$, $CA=y$. Tagliata $AG=\frac{3}{2}a$, e tirata GF parallela ad AC, segno $GD=\frac{31}{24}a$, ed all'asse GF, col parametro $=6a$, e col vertice in D delineo la parabola HDH', le coordinate della quale $DF=x-\frac{31}{24}a$, $FH=y+\frac{3}{2}a$. Le due parabole né si toccano, né si tagliano e perciò le quattro radici sono immaginarie. Secondochè stabilisco $x=a+a\sqrt{-1}$,

x.

3. 1782

$x = a - a\sqrt{-1}$, $x = -a - a\sqrt{-1}$, $x = -a + a\sqrt{-1}$ trovo per l'equazioni di amendue le parabole $y = 2a\sqrt{-1}$, $y = -2a\sqrt{-1}$, $y = 2a\sqrt{-1}$ $y = -2a\sqrt{-1}$, che sono valori tutti immaginarj ignoti alla geometria. Queste ordinate sono comuni ai rami immaginarj delle due parabole, e tal communanza dinota la loro immaginaria intersecazione.

Si cavi da quanto ho scritto la conseguenza, che tutte l'equazioni del terzo grado prive del secondo termine, alla qual forma può ridursi qualunque proposta equazione del mentovato grado, si possono costruire con una parabola, e con un'iperbola fra gli assintoti, la qual costruzione somministra tutte le loro radici reali, che differiscono per una costante da quelle dell'equazione proposta. Similmente ad ogni equazione del quarto grado mancante del secondo termine, a cui ci è permesso di ridurre qualsivoglia equazione del dato grado, si adatta la costruzione con due parabole, che determinano tutte le sue radici reali, le quali per una data differiscono da quelle della proposta equazione. La sicurezza di ritrovare tutte le radici reali dipende dalla sostruzione $x^2 = ay$ alla parabola fornita della proprietà, che a qualunque valore reale di x si riferisce un valore reale di y, la quale non compete alle altre sezioni coniche, eccettuata l'iperbola fra gli assintoti. Quindi in tali curve può addivenire, che ad un dato valore di x uguale ad una, o a due radici dell'equazione da costruirsi corrisponda la y immaginaria, e che perciò non segua nelle due curve componenti la costruzione quella intersecazione, o contatto, dai quali dipende la determinazione delle radici. La difficoltà pertanto promossa dal Rollio è pienamente disciolta, e la sua soluzione, mi è riuscito di collocarla in un chiarissimo lume

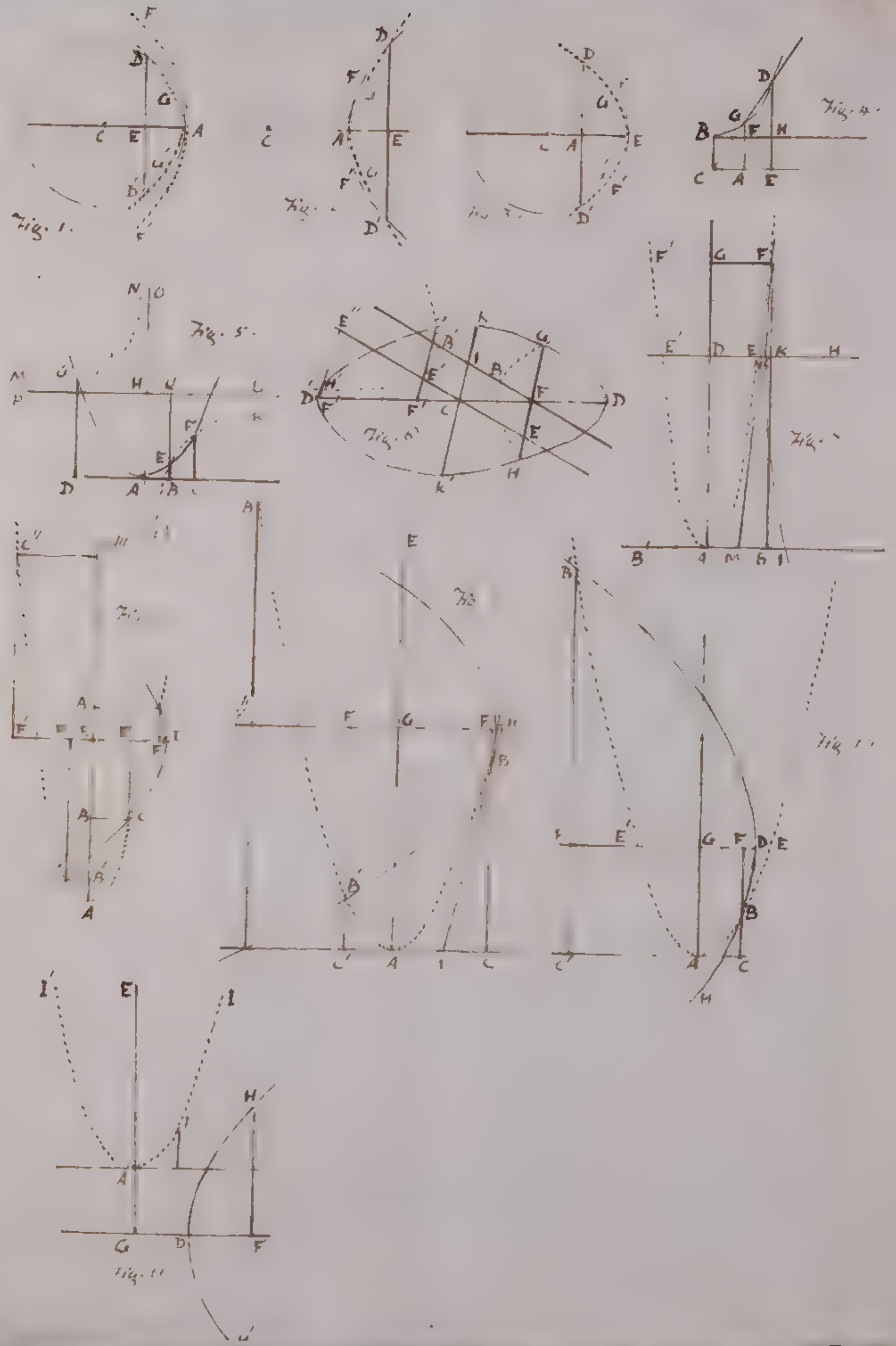


Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 11

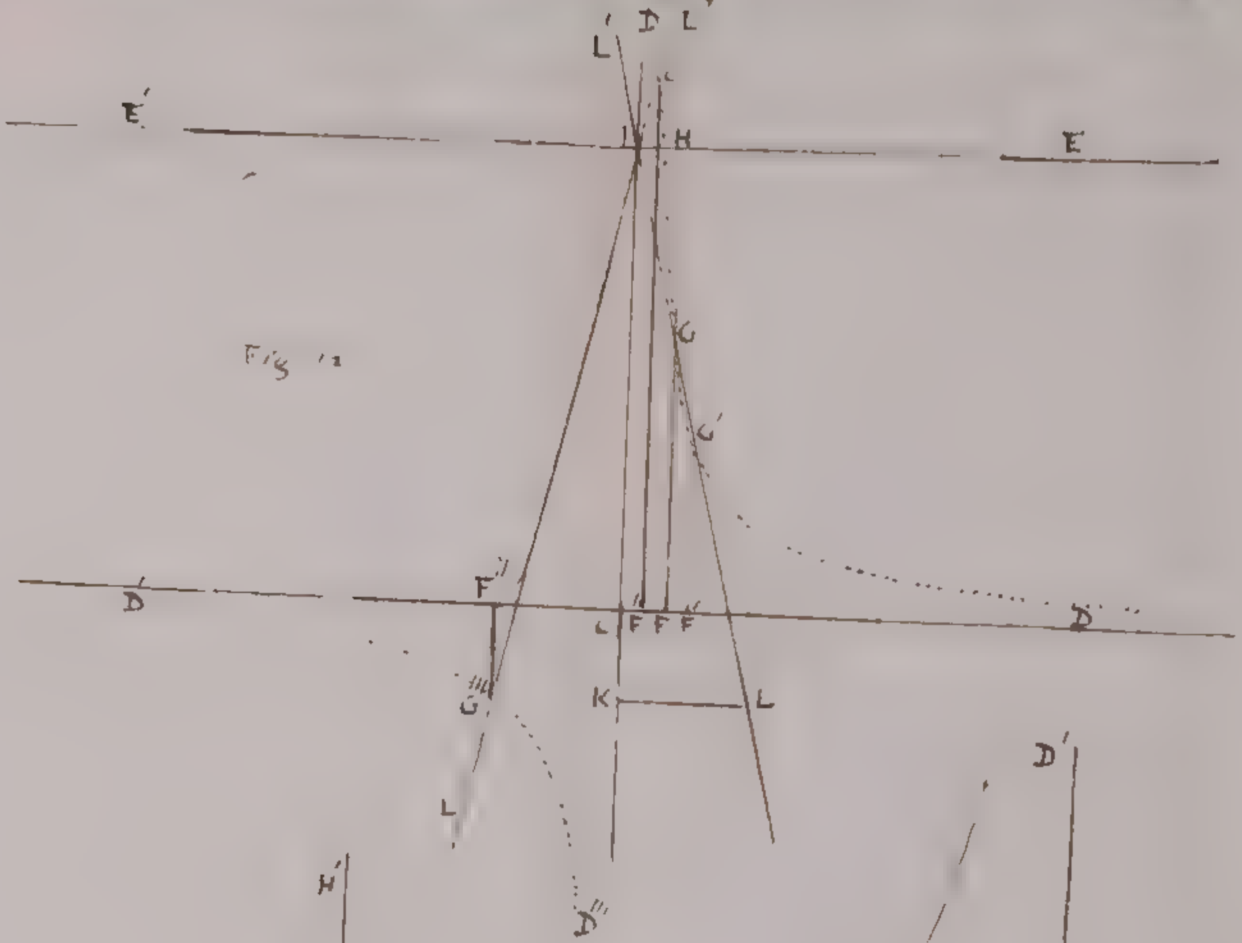


Fig 12

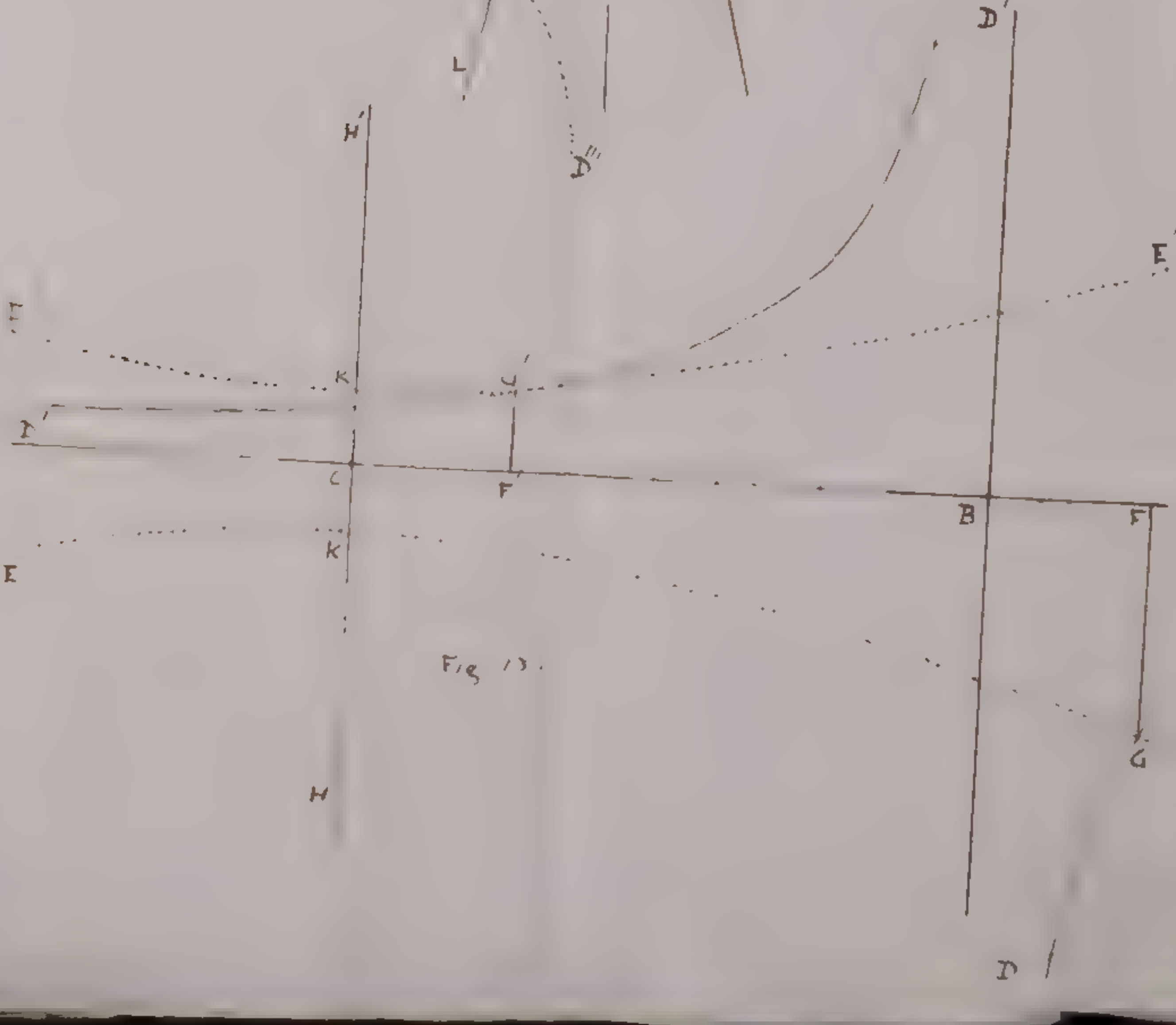


Fig 13.

oluzione adamica della [illegible]

$x^3 - px - q = 0$

Soluzione Cardanica della formola

$$x^3 - px - q = 0$$

Faccio $x = m+n$, e trovo $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$. Sostituisco in cambio di $m+n$ il suo valore x, ed ho $x^3 = m^3 + 3mnx + n^3$, e quindi $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$. Paragonata questa formola colla proposta, scopro $3mn = p$, $m^3+n^3 = q$. La prima di tali equazioni mi dà $\frac{p}{3m} = n$. Sostituito il valore di n nella seconda, mi si presenta $m^3 + \frac{p^3}{27m^3} = q$, o sia $m^6 + \frac{p^3}{27} = qm^3$, e perciò $m^6 - qm^3 = -\frac{p^3}{27}$, e supplendo al quadrato $m^6 - qm^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$. Cavata la radice seconda, trovo $m^3 - \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, e finalmente $m = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$. Essendo $m^3+n^3 = q$, se ad m^3 compete il valore $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, n^3 accetterà il valore $\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$, onde ne risulti $x = m+n =$
$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Pretende il Sig.r Ab. Rizzi, che questa soluzione supponga due radici eguali. Sieno queste $x+z=0$, $x+z=0$: ma la terza radice $x-m-n=0$, e mancando il secondo termine nell'equazione proposta, la somma delle tre radici esser dee $=0$; dunque $-m-n+2z=0$, e per conseguenza $z = \frac{m+n}{2}$. Quindi avremo le tre radici $x-m-n=0$, $x+\frac{m+n}{2}=0$, $x+\frac{m+n}{2}=0$. Formando con queste tre radici l'equazione del terzo grado, ne nasce $x^3 - \frac{3}{4}x\cdot(m+n) - \frac{1}{4}(m+n)^3 = 0$, la quale del pari si annulla ponendo $x = m+n$, ovvero $x = -\frac{m+n}{2}$.

Vediamo se questa equazione conviene colla proposta $x^3 - px - q = 0$. Paragonandole si trova $\frac{3}{4}(m+n)^2 = p$, $\frac{1}{4}(m+n)^3 = q$. Ora

per

nella circostanza, che sia $p = 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}q^2}$), né ~~non generalmente~~, come il Sig. Ab. Rizzi-avatando, dalla soluzione Cardanica si deduce, ch'essa dovesse avere generalmente due radici uguali.

Esame del Metodo del Sig.r Edmondo Waring, con cui ...

05

Esame del metodo, col quale il Chiarissimo
Edmondo Waring. ha pensato d'aver
ridotte l'Equazioni del quinto
grado a quelle del terzo

Esame del Metodo del Sig.r Edmondo Waring, con cui

Esame del Metodo, col quale il Chiarissimo Sig.r Edmondo Waring ha pensato di aver ridotte le equazioni del quinto grado a quella del terzo. Del P. Vincenzo Riccati della Compagnia di Gesù.

Merita di essere esaminato con accuratezza il metodo, onde l'ingegnoso Sig.r Edmondo Waring ha un tempo pensato di aver ridotte le equazioni del quinto grado a quella del terzo. Io espongo il metodo per guisa, che si conosca la maniera dell'operare. Sia pertanto l'equazione del quinto grado mancante del secondo termine $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$. Si moltiplichi per x, e si porrà al sesto $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx=0$. Si aggiunga dall'una parte e dall'altra $\overline{Mx^3+Nx+P}^2$, onde risulti $\overline{M^2+1}\cdot x^6+\overline{2MN+a}\cdot x^4+\overline{2MP+b}\cdot x^3+\overline{N^2+c}\cdot x^2+\overline{2NP+d}\cdot x+P^2$ $=\overline{Mx^3+Nx+P}^2$. Il metodo esige, che siccome è un quadrato completo la seconda parte dell'equazione, così lo sia egualmente la prima. Avendola per tale supporremo, che la sua radice sia Ax^3+Bx+C, onde uguagli $A^2x^6+2ABx^4+2ACx^3$ $+B^2x^2+2BCx+C^2$. Paragonando termine con termine ritroveremo $A=\sqrt{M^2+1}$, $B=\frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}}$, $C=\frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}}$.

Determinati i valori delle A, B, C, la comparazione produrrà le tre seguenti equazioni I. $\frac{\overline{2MN+a}^2}{4\cdot\overline{M^2+1}}=N^2+c$, ovvero $\frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}}$ $=\sqrt{N^2+c}$, II. $\frac{\overline{2MN+a}\cdot\overline{2MP+b}}{2\cdot\overline{M^2+1}}=2NP+d$, III. $\frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}}=P$.

Moltiplicando la I. per la III. sarà $\frac{\overline{2MN+a}\cdot\overline{2MP+b}}{4\cdot\overline{M^2+1}}=P\sqrt{N^2+c}$ e sostituendo questo valore nella II. sarà $2P\sqrt{N^2+c}=2NP+d$. Quindi avremo le tre equazioni tali quali le espone l'Autore I. $2MN+a=2\sqrt{M^2+1}\cdot\sqrt{N^2+c}$, II. $2NP+d=2P\sqrt{N^2+c}$, III. $2MP+b=2P\sqrt{M^2+1}$, per le quali, secondo l'Autore si possono determinare le tre M, N, P.

Estraggasi la radice quadrata della nostra equazione, e sarà $\pm\sqrt{M^2+1}\cdot x^3\pm\frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}}\cdot x\pm\frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}}=Mx^3+Nx+P$, ovvero sostituendo i valori somministrati dall'equazioni trovate

±

in una del terzo, ed una del secondo grado.

Ma il Sig.r Waring ad una equazione perviene, con cui determina generalmente il valor della p, onde da prima ha giudicato essere il suo metodo universale. Osserviamone il modo, e ritroveremo dove stia appiattato il paralogismo. L'equazion I. alzata al quadrato dà $4M^2N^2 + 4aMN + a^2 = 4M^2N^2 + 4cM^2 + 4N^2 + 4e$, ovvero $aMN + \frac{1}{4}a^2 = cM^2 + N^2 + e$. Sostituiscansi i valori trovati della M, N, e si avrà

$$a \cdot \overline{\frac{p}{b} - \frac{b}{4p}} \cdot \overline{\frac{cp}{d} - \frac{d}{4p}} + \frac{1}{4}a^2 = \frac{cp^2}{b^2} - \frac{c}{2} + \frac{cb^2}{16p^2} + \frac{c^2p^2}{d^2} - \frac{c}{2} + \frac{d^2}{16p^2} + e,$$

la quale ridotta prende il seguente aspetto

$$\begin{aligned} &\frac{acp^2}{bd} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{abd}{16p^2} \\ &-\frac{cp^2}{b^2} - \frac{1}{4}\frac{ad}{b} - \frac{cb^2}{16p^2} = 0 \\ &-\frac{c^2p^2}{d^2} - \frac{1}{4}\frac{acb}{d} - \frac{d^2}{16p^2} \end{aligned}$$

e nuovamente ridotta diviene

$$\overline{cp^2 + \frac{1}{4}abd + \frac{1}{16}\frac{b^2d^2}{p^2}} \cdot \left(\frac{a}{bd} - \frac{1}{b^2} - \frac{c}{d^2}\right) = 0.$$

Ora l'Autore divide per la quantità $\frac{a}{bd} - \frac{1}{b^2} - \frac{c}{d^2}$, e ritrova $cp^2 + \frac{1}{4}abd + \frac{1}{16}\frac{b^2d^2}{p^2} = 0$, per cui è di avviso potersi in ogni caso scoprire il valor della p, onde si ottenga la bramata risoluzione. Ma si inganna. Perciocchè in due maniere può esser vera l'equazione, ove l'analisi ci conduce, o perchè $cp^2 + \frac{1}{4}abd + \frac{1}{16}\frac{b^2d^2}{p^2} = 0$, o perchè $\frac{a}{bd} - \frac{1}{b^2} - \frac{c}{d^2} = 0$. La prima non serve all'intento, nè porta ad una vera risoluzione: la seconda solamente è utile, ma dimostra, che la risoluzion non si ottiene, quando non sia $a = \frac{d}{b} + \frac{cb}{d}$.

Convien però far giustizia all'ingegnoso Scrittore, che egli dopo avere stampato il suo libro, si è avveduto della mancanza del suo metodo, avendo nella copia mandata all'Accademia di Bologna sotto alla proposizione aggiunto colla penna queste precise parole: <u>Haec regula fallit, ni summa duarum, vel quod idem est summa trium radicum nihilo sit aequalis</u>. La correzione è giustissima, perchè qualunque

vo'lta

Esame del Metodo del Sig. Edmondo Waring, con cui tenta di ridurre al terzo l'equazioni del quinto grado.

Abbiasi l'equazione $x^5 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Moltiplico per x, ed aggiunga da entrambe le parti $\overline{Mx^3+Nx+P}^2$, onde s'abbia $\overline{M^2+1}\cdot x^6 + \overline{2MN+a}\cdot x^4 + \overline{2MP+b}\cdot x^3 + \overline{N^2+c}\cdot x^2 + \overline{2NP+d}\cdot x + P^2 = \overline{Mx^3+Nx+P}^2$.

Giusta il metodo dello ingegnoso Sig. Waring la prima parte ha da essere un quadrato. Sia la sua radice $Ax^3 + Bx + C$, che alzata al quadrato mi dà $A^2x^6 + 2ABx^4 + 2ACx^3 + B^2x^2 + 2BCx + C^2$. Paragonando i due primi termini si trova $A = \sqrt{M^2+1}$. Dal confronto dei due secondi termini ne risulta $B = \frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}}$, ed il paragone dei due terzi determina $C = \frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}}$.

Gli altri termini comparati somministrano le seguenti equazioni I. $\frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}} = \sqrt{N^2+c}$; II. $\frac{\overline{2MN+a}\cdot\overline{2MP+b}}{2\cdot\overline{M^2+1}} = 2NP+d$; III. $\frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}} = P$. Moltiplicando la I. per la III., e facendo la sostituzione nella II., avremo le tre equazioni (I.) $2MN+a = 2\sqrt{M^2+1}\cdot\sqrt{N^2+c}$, (II.) $2P\sqrt{N^2+c} = 2NP+d$, (III.) $2MP+b = 2P\sqrt{M^2+1}$.

Estratta dalla nostra equazione la radice quadrata, si scoprirà $\pm\sqrt{M^2+1}\cdot x^3 \pm \left(\frac{2MN+a}{2\sqrt{M^2+1}}\right)x \pm \left(\frac{2MP+b}{2\sqrt{M^2+1}}\right) = Mx^3 + Nx + P$, ovvero ponendo in opera l'equazioni (I.), e (III.), $\pm\sqrt{M^2+1}\cdot x^3 \pm \sqrt{N^2+c}\cdot x \pm P = Mx^3 + Nx + P$. Da questa equazione nascono le due sottoscritte, secondochè si prendono i segni superiori, o inferiori

$\overline{\sqrt{M^2+1} - M}\cdot x^3 + \overline{\sqrt{N^2+c} - N}\cdot x = 0$

$\overline{\sqrt{M^2+1} + M}\cdot x^3 + \overline{\sqrt{N^2+c} + N}\cdot x + 2P = 0$, le quali dovrebbero contenere le cinque radici della proposta equazione.

Cerchiamo

$\overline{\frac{p^2}{b^2}+\frac{1}{2}+\frac{b^2}{16p^2}}\cdot x^6 + \overline{\frac{2cp^2}{bd}+\frac{bc}{2d}+\frac{d}{2b}+\frac{2bd}{16p^2}}\cdot x^4 + \overline{\frac{2p^2}{b}+\frac{b}{2}}\cdot x^3$
$+\overline{\frac{c^2p^2}{d^2}+\frac{c}{2}+\frac{d^2}{16p^2}}\cdot x^2 + \overline{\frac{2cp^2}{d}+\frac{d}{2}}\cdot x + p^2 =$
$\overline{\overline{\frac{p}{b}-\frac{b}{4p}}\cdot x^3 + \overline{\frac{cp}{d}-\frac{d}{4p}}\cdot x + p}^{\,2}$. Estratta la radice quadrata, ci si presenterà $\pm\overline{\frac{p}{b}\pm\frac{b}{4p}}\cdot x^3 \pm \overline{\frac{cp}{d}\pm\frac{d}{4p}}\cdot x \pm p$
$= \overline{\frac{p}{b}-\frac{b}{4p}}\cdot x^3 + \overline{\frac{cp}{d}-\frac{d}{4p}}\cdot x + p$. I segni superiori ci danno, effettuati i necessarj computi, $x^2+\frac{d}{b}=0$, e dai segni inferiori si raccoglie $x^3+\frac{bc}{d}x+b=0$, conforme abbiamo di sopra trovato.

La condizione che sia $a=\frac{bc}{d}+\frac{d}{b}$ dipende da un'altra, cioè che nella proposta equazione del quinto grado, priva del secondo termine non solo sia $=0$ la somma delle cinque radici, ma ancora la somma di tre, e per conseguenza l'aggregato delle due rimanenti, il che ci viene chiaramente indicato dalle due equazioni, nelle quali si risolve, che sono parimente mancanti del secondo termine.

Potea facilmente accorgersi il Sig.r Waring (e realmente se n'è avveduto dopo aver pubblicata la sua Dissertazione) che il suo metodo era limitato, osservando che se una formola del sesto grado senza il secondo termine è un quadrato; la sua radice ha da essere necessariamente una formola del terzo grado, in cui altresì non si trova il secondo termine. La dimostrazione di questa verità è così agevole, che la tralascio ben volontieri. Quindi se il metodo conduce ad un'equazione del terzo grado mancante

dal

Riflessioni intorno alla formola
[illegible]

Riflessioni sopra la nuova invenzione del Sig.r Edmondo Waring di ridurre l'equazioni del quinto grado a quello del terzo.

Sia l'equazione $x^5+ax^3+bx^2+cx+d=0$, (1) la quale si moltiplichi per x, onde ascenda al sesto grado $x^6+ax^4+bx^3+cx^2+dx=0$. S'aggiunga da entrambe le parti $M^2x^6+2MNx^4+2MPx^3+N^2x^2+2NPx+P^2=\overline{Mx^3+Nx+P}^2$, e si avrà
$\overline{M^2+1}\cdot x^6+\overline{2MN+a}\cdot x^4+\overline{2MP+b}\cdot x^3+\overline{N^2+c}\cdot x^2+\overline{2NP+d}\cdot x+P^2=\overline{Mx^3+Nx+P}^2$, ovvero

$$\overline{M^2+1}\left(x^6+\frac{2MN+a}{M^2+1}\cdot x^4+\frac{2MP+b}{M^2+1}\cdot x^3+\frac{N^2+c}{M^2+1}\cdot x^2+\frac{2NP+d}{M^2+1}\cdot x+\frac{P^2}{M^2+1}\right)=\overline{Mx^3+Nx+P}^2.$$

Richiede il metodo dell'Autore, che siccome è un quadrato compiuto la seconda parte dell'equazione, così lo sia anche la prima; dimodochè estraendo la radice quadrata dell'equazione si abbassi al terzo grado.

Per ottenere l'intento, stabiliscansi le seguenti equalità $\frac{2MN+a}{\sqrt{M^2+1}}=2\sqrt{N^2+c}$, $\frac{2MP+b}{\sqrt{M^2+1}}=2P$, $2NP+d=2P\sqrt{N^2+c}$.

Sostituiti questi valori nella prima parte dell'equazione, ne nasce

Riflessioni intorno alla formola

che mancando in essa il secondo termine, ed essendo per conseguenza la somma delle cinque radici = 0, sia inoltre = 0 la somma di due radici, e quindi ancora si annulli l'aggregato delle tre rimanenti contenute nella formola $-\sqrt{M^2+i}-M \cdot x^3$ $-\sqrt{N^2+c}-N \cdot x - 2P = 0$, ovvero nella seguente
$x^3 + \frac{\sqrt{N^2+c}+N}{\sqrt{M^2+i}+M} \cdot x + \frac{2P}{\sqrt{M^2+i}+M} = 0$,
la quale in fatti è priva del secondo termine. Se dunque l'equazione del quinto grado non avrà questa proprietà, non si potrà ridurre ad una del terzo col metodo del nostro Autore.

Egli è d'uopo, per dedurre le opportune conseguenze, il determinare le tre quantità M, N, P. Dalla seconda delle stabilite eguaglianze si raccoglie $M = \frac{4P^2-b^2}{4bP} = \frac{P}{b} - \frac{b}{4P}$, e conseguentemente $\sqrt{M^2+i} = \frac{P}{b} + \frac{b}{4P}$.
La terza eguaglianza mi dà $N = \frac{4cP^2-d^2}{4dP}$ $= \frac{cP}{d} - \frac{d}{4P}$, e $\sqrt{N^2+c} = \frac{cP}{d} + \frac{d}{4P}$.
I valori delle M, N dati per P posti nella prima eguaglianza somministrano* ~~la formola~~ $\frac{bd}{4c}$ ... $\frac{bd^2}{16c}$ ~~che si riduce alla seguente~~ ~~$\sqrt{\frac{bd}{4c}} \ldots$~~ specie P divisa, che posta $a = \frac{bc}{d} + \frac{d}{b}$, ottervò la risoluzione della formola

* $a \cdot \frac{P}{b} - \frac{b}{4P} \cdot \frac{cP}{d} - \frac{d}{4P} + a = 2 \cdot \frac{P}{b} + \frac{b}{4P} \cdot \frac{cP}{d} + \frac{d}{4P}$
ed effettuate le moltiplicazioni,
$\frac{2cP^2}{bd} - \frac{bc}{2d} - \frac{d}{2b} + \frac{bd}{8P^2} + a = \frac{2cP^2}{bd} + \frac{bc}{2d} + \frac{d}{2b} + \frac{bd}{8P^2}$,
e finalmente $a = \frac{bc}{d} + \frac{d}{b}$.

Se si potesse determinare il valore di P per quello delle costanti a, b, c, d, sarebbe generale la soluzione del Sig.r Waring. Ma quando io credo di stabilire il valore di P, questa specie svanisca, e trovo una determinazione della costante a, mediante la quale, il metodo stesso m'insegna, che esso non può aver luogo, salvochè nell'ipotesi di $a = \frac{bc}{d} + \frac{d}{b}$. In questa sola circostanza adunque la formola del quinto grado moltiplicata per x colla aggiunta della quantità $(Mx^3 + Nx + P)^2$ può divenire un quadrato, e risolversi in due equazioni, una del secondo, e l'altra del terzo grado giusta il metodo del nostro Autore. Il dileguarsi della

Riflessioni intorno alla formola
[illegible]

due radici eguali affette da segni contrarj, potrà usarsi il metodo del Sig.r Waring.

Per mettere in pieno lume questa verità, mi formo un'equazione del quinto grado colle condizioni, che richiede il metodo dello ingegnoso Autore. Siano dunque le sue radici
$x + A = 0$, $x - A = 0$, $x \pm B = 0$
$x \pm C = 0$, $x \mp B \mp C = 0$, e ne risulterà

$$\begin{array}{llll} x^5 - A^2x^3 & \mp B^2Cx^2 & + A^2B^2x & \pm A^2B^2C = 0 \; (5) \\ \quad - B^2x^3 & \mp BC^2x^2 & + A^2BCx & \pm A^2BC^2 \\ \quad - BCx^3 & & + A^2C^2x & \\ \quad - C^2x^3 & & & \end{array}$$

Questa equazione si risolve nelle due

$$x^2 - A^2 = 0 \; (6), \quad \begin{array}{lll} x^3 - B^2x & \mp B^2C & = 0 \; (7). \\ \quad - BCx & \mp BC^2 & \\ \quad - C^2x & & \end{array}$$

Paragonando tali equazioni colla (1) proposta, e colle due (2), (3) nelle quali scomponesi, avremo $-A^2 - B^2 - BC - C^2 = a$, $\mp B^2C \mp BC^2 = b$, $A^2B^2 + A^2BC + A^2C^2 = c$, $\pm A^2B^2C \pm A^2BC^2 = d$, e dovrà essere $-A^2 = \frac{d}{b} = \frac{\pm A^2B^2C \pm A^2BC^2}{\mp B^2C \mp BC^2}$,
$-B^2 - BC - C^2 = \frac{bc}{d} = \frac{\mp B^2C \mp BC^2 \, . \, A^2B^2 + A^2BC + A^2C^2}{\pm A^2B^2C \pm A^2BC^2}$;
il che puntualmente si avvera.

Basta, che si pongano al confronto le equazioni (4), e (5), le quali

perchè sia la prima grandezza moltiplicante $=0$, e non bensì perchè $\frac{ac}{bd} - \frac{d}{b} - \frac{c}{d} = 0$.

Riflessioni intorno alla formola $(1+h\sqrt{-1})^m - (1-h\sqrt{-1})^m$.

[illegible] ciò, sebbene nel caso, che l'equa- zione contenga due radici eguali [illegible] [illegible], [illegible] circostanza [illegible] il metodo sia giusto, e in tutte le altre guida ad errore conforme si è notato da me di sopra, e [illegible] [illegible] nel [illegible] della sua Dissertazione. L'aggiunta della [illegible] grandezza, nella quale [illegible] parte delle equazioni, perchè [illegible] [illegible] il valore delle radici [illegible] equazione [illegible] ax^2 [illegible] è formata dalle due radici $x = \frac{[illegible]}{\sqrt{a}}$ [illegible] $\frac{\sqrt{a}\,[illegible]}{\sqrt{a}} = 0$ [illegible], e dalle altre [illegible], onde si abbia [illegible] [illegible] radice [illegible] $x = \frac{[illegible]}{1 \pm \sqrt{a}}$, radici totalmente di- verse dalle precedenti.

perchè sia la prima grandezza [illegible] [illegible] perchè $\frac{[illegible]}{bd}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{b^2}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{d^2} = 0$.

Riflessioni intorno alla formola
$(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$.

Riflessioni intorno alla formola
$(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$.

Il ch. Sig. d'Alembert nel Tomo III. delle Miscellanee di Torino pag. 343., chiamata π la semicirconferenza circolare del raggio $=1$, $\theta\pi$ l'arco, la cui tangente $=h$, ed μ un numero intero positivo, o negativo, determina $m=\frac{\mu}{\theta}$, e posto un tal valore relativo ad h, asserisce $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$. Se $m=1$, ne proviene $\theta=\mu$, e perciò $\theta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c., e conseguentemente $\theta\pi$ eguale alla semicirconferenza π moltiplicata per $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c. Quindi $h=0$, essendo nulla la tangente della semicirconferenza moltiplicata per un numero della soprascritta progressione. Per la qual cosa assegnati ad m, h i valori relativi $1, 0$, si avvera anche in tal incontro la nostra formola $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$.

Col metodo del Newton si trova

$$(1+h\sqrt{-1})^m = 1 + mh\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot h^2\sqrt{-1}^2 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot h^3\sqrt{-1}^3$$
$$+ m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot h^4\sqrt{-1}^4 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5\sqrt{-1}^5 \text{ \&c.},$$
$$(1-h\sqrt{-1})^m = 1 + mh\cdot-\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot h^2(-\sqrt{-1})^2 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot h^3(-\sqrt{-1})^3$$
$$+ m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot h^4(-\sqrt{-1})^4 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5(-\sqrt{-1})^5 \text{ \&c.}$$

Ora scambievolmente elidendosi nelle due serie le due unità, e quei termini, nei quali $\pm\sqrt{-1}$ è alzata a potestà pari; ne segue, che se $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, dovrà parimente essere

$$mh\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot h^3\sqrt{-1}^3 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5\sqrt{-1}^5 \text{ \&c.}$$
$$= mh\cdot-\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot h^3(-\sqrt{-1})^3 + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5(-\sqrt{-1})^5 \text{ \&c.}$$

e poichè $(\pm\sqrt{-1})^3 = \mp\sqrt{-1}$, $(\pm\sqrt{-1})^5 = \pm\sqrt{-1}$, $(\pm\sqrt{-1})^7 = \mp\sqrt{-1}$ &c., ne risulterà

$$mh\sqrt{-1} - \left(m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\right)h^3\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5\sqrt{-1} - \text{\&c.}$$
$$= mh\cdot-\sqrt{-1} - \left(m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\right)h^3\cdot-\sqrt{-1} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-4}{5}\cdot h^5\cdot-\sqrt{-1} - \text{\&c.}$$

Questa equazione si avvererebbe generalmente, assegnati ad m e ad h qualunque valore, se contro la verità, e contro il sentimento del Sig. di Alembert fosse $\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$, come pretende il Sig. Prof. Nicolai. Ma non potendo ciò accordarsi,

fatta

compete la tangente $-\sqrt{3}$, e questi archi richieggono $m = 3$, onde si abbia $(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = (1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1})^3$. Ed in fatti alzando effettivamente alla terza potestà troveremo $1 \pm 3\sqrt{-3} - 9 \mp 3\sqrt{-3} = 1 \mp 3\sqrt{-3} - 9 \pm 3\sqrt{-3}$. Può ancora essere per la formola del Sig. di Alembert, $m = \frac{\mu}{\theta} = 3\mu = 0, 3, 6, 9$ &c. imperciocchè se $(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = (1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1})^3$, avremo altresì $(1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1})^6 = (1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1})^6$ &c.

La determinazione di $m = 4$ richiede $h = 0$, $h = \pm 1$. La tangente $h = 1$ si adatta agli archi $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$ &c., e la tangente $h = -1$ compete agli archi $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, $\frac{11}{4}\pi$ &c. Scopriremo pertanto $(1 \pm \sqrt{-1})^4 = (1 \mp \sqrt{-1})^4$, il che si rende manifesto elevando i due binomj alla quarta potestà. Accetterà generalmente ~~pienamente~~ m i valori 0, 4, 8, 12 &c. per la formola $m = \frac{\mu}{\theta} = 4\mu$.

Dalla supposizione di $m = 5$ ho già notato che si raccoglie $h = 0$, $h = \pm\sqrt{(5 \pm 2\sqrt{5})}$. E $\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$ la tangente di $\frac{1}{5}\pi$, $\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$ la tangente di $\frac{2}{5}\pi$, $-\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$ la tangente di $\frac{3}{5}\pi$, e $-\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$ la tangente di $\frac{4}{5}\pi$, ai quali archi si possono aggiungere uno, e più semicircoli. Riceverà generalmente m ~~altresì~~ i valori 0, 5, 10, 15, 20, &c.

La ipotesi di $m = 6$ determina, come abbiamo veduto, $h = 0$, $h = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $h = \pm\sqrt{3}$. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ è la tangente di $\frac{1}{6}\pi$, $\sqrt{3}$ la tangente di $\frac{2}{6}\pi$, $-\sqrt{3}$ la tangente di $\frac{4}{6}\pi$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ la tangente di $\frac{5}{6}\pi$, e questi archi si possono accrescere per uno, e più semicircoli. Generalmente accetterà m i valori 0, 6, 12, 18 &c.

Seguitando con questo metodo, e ponendo $m = 7, 8, 9$ &c., si troverebbero le tangenti h della parte settima, ottava, nona &c. del semicircolo, ed usati i valori relativi di m, e di h, si averebbe sempre la formola

$$(1 + h\sqrt{-1})^m$$

Finirò con aggiungere alcune avvertenze. Negli addotti esempj ho sempre stabilito m uguale ad un numero intero, il che nella formola del Sig.r d'Alembert $m=\frac{\mu}{\theta}$ suppone θ parte aliquota dell'unità. Che se fosse parte aliquanta, m diverrebbe generalmente uguale ad una frazione. Io posso tuttavolta assegnare ad μ un valore preso dalla serie $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c., che faccia divenir m numero intero. Sia esempigrazia $\theta=\frac{2}{3}$, onde si abbia $m=\mu\cdot\frac{3}{2}$: posto $\mu = 2, 4, 6$ &c., si determina $m = 3, 6, 9$ &c. numeri interi. E poichè $(1+h\sqrt{-1})^3=(1-h\sqrt{-1})^3$, $(1+h\sqrt{-1})^6=(1-h\sqrt{-1})^6$ &c.; assegnato ad μ un numero impari, per esempio l'unità, sarà parimente $(1+h\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}=(1-h\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}}$; imperciocchè due cubi eguali hanno le radici eguali, ed altresì $(1+h\sqrt{-1})^{\frac{6}{2}}=(1-h\sqrt{-1})^{\frac{6}{2}}$ &c.

Afferma il lodato Autore nella Memoria XXXV. §. 11. num.ro 40. contenuta nella parte seconda del Tomo V. de' suoi Opuscoli, che dall'essere $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, non si può conchiudere $(1+h\sqrt{-1})^{m^n}=(1-h\sqrt{-1})^{m^n}$, essendo n un numero qualunque, purchè non intero, positivo o negativo. La formola $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$ è vera condizionatamente, quando h, ed m sono forniti di valori relativi. Data la tangente h dell'arco $\theta\pi$, è parimente dato l'esponente $m=\frac{\mu}{\theta}$, nella qual espressione μ può ricevere i valori $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c.. Acciocchè sia $(1+h\sqrt{-1})^{m^n}$ $(1-h\sqrt{-1})^{m^n}$, egli è d'uopo che m^n possa eguagliarsi ad $\frac{\mu}{\theta}$. Sia per esempio $\theta=\frac{1}{3}$, e ad m potranno competere i valori 0, 3, 6, 9, 12 &c. Si faccia $m=9$, e posto $n=\frac{1}{2}$, ne proviene $m^n = 3$, ed in tal caso si avvera la formola $(1+h\sqrt{-1})^{m^n} = (1-h\sqrt{-1})^{m^n}$. Questa formola dunque non è sempre

falsa

Maneggiare la formola

$$a = \sqrt[3]{-u + \sqrt{u^2 - 1}} + \sqrt[3]{-u - \sqrt{u^2 - 1}}$$

Maneggiamo la formola $a = \sqrt[3]{-u+\sqrt{u^2-1}} + \sqrt[3]{-u-\sqrt{u^2-1}}$ che nasce dalla risoluzione della formola

$$a^3 - 3a + 2u = 0$$

Sia $u = \frac{11}{16}$ nel qual caso sappiamo altronde essere $a = \frac{1}{2}$. Sostituito in cambio di u il suo valore avremo $a = \sqrt[3]{-\frac{11}{16}+\sqrt{-\frac{135}{256}}} + \sqrt[3]{-\frac{11}{16}-\sqrt{-\frac{135}{256}}}$. Faccio

$\frac{1}{4} - m\sqrt{-\frac{135}{256}} = \sqrt[3]{-\frac{11}{16}+\sqrt{-\frac{135}{256}}}$, ed alzando alla terza potenza trovo dopo le necessarie operazioni

$$\frac{1}{64} - \frac{3}{4}\cdot\frac{135}{256}\cdot m^2 - \left(\frac{3m}{16} - \frac{135\cdot m^3}{256}\right)\sqrt{-\frac{135}{256}} = -\frac{11}{16} + \sqrt{-\frac{135}{256}}$$

Stabilisco l'equazione $\frac{1}{64} - \frac{3}{4}\cdot\frac{135}{256}m^2 = -\frac{11}{16}$, ed il calcolo m'insegna essere $m = \frac{4}{3}$. Dal la qual cosa $m\sqrt{-\frac{135}{256}} = \sqrt{-\frac{15}{16}}$, e perciò

$$a = \frac{1}{4} - \sqrt{-\frac{15}{16}} + \frac{1}{4} + \sqrt{-\frac{15}{16}} = \frac{1}{2}.$$

Sia $u = \frac{13}{27}$, nel qual caso $a = \frac{1}{3}$. Sostituito in luogo di u il suo valore, avremo

$a = \sqrt[3]{-\frac{13}{27}+\sqrt{-\frac{560}{27^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{13}{27}-\sqrt{-\frac{560}{27^2}}}$. Pongo

$\frac{1}{6} - m\sqrt{-\frac{560}{27^2}} = \sqrt[3]{-\frac{13}{27}+\sqrt{-\frac{560}{27^2}}}$, ed alzando al cubo trovo

$$\frac{1}{6^3} - \frac{280m^2}{27^2} - \left(\frac{m}{12} - m^3\cdot\frac{560}{27^2}\right)\sqrt{-\frac{560}{27^2}} = -\frac{13}{27} + \sqrt{-\frac{560}{27^2}}.$$

Faccio $\frac{1}{6^3} - \frac{280m^2}{27^2} = -\frac{13}{27}$, e scopro $m = \frac{9}{8}$, e quindi

$$m\sqrt{-\frac{560}{27^2}} = \frac{9}{8}\sqrt{-\frac{560}{27^2}} = \sqrt{-\frac{35}{36}}$$

Sia $u = \frac{5}{4\sqrt{2}}$, nel qual incontro $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ponendo in luogo di u il suo valore, trovo

$a = \sqrt[3]{-\frac{5}{4\sqrt{2}}+\sqrt{-\frac{7}{32}}} + \sqrt[3]{-\frac{5}{4\sqrt{2}}-\sqrt{-\frac{7}{32}}}$. Metto al solito

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

un tal valore, che $4-a^2$ sia un numero quadrato moltiplicato per 15. Si ottiene ciò facendo $a=\frac{1}{2}$, dimodochè sia $4-a^2 = 4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, e per conseguenza $\frac{4-a^2}{15} = \frac{1}{4}$, e per ultimo $m^2 = \frac{64}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{16}{9}$ conforme si è ritrovato nel 1.mo esempio.

Nel secondo esempio $S^2 = \frac{560}{27^2}$, e $4\cdot S^2 = \frac{4\cdot 560}{27^2}$.

Avremo pertanto $\frac{4-a^2}{4S^2} = \frac{27^2\cdot 4-a^2}{4\cdot 560} = \frac{27^2}{8^2}\cdot\frac{4-a^2}{35} = m^2$.

La grandezza $4-a^2$ sarà un numero quadrato moltiplicato per 35, ponendo $a^2=\frac{1}{9}$, onde sia $4-a^2 = 4-\frac{1}{9} = \frac{35}{9}$. Il perchè $\frac{4-a^2}{35} = \frac{1}{9}$, e $\frac{27^2}{8^2}\cdot\frac{1}{9} = \frac{81}{64} = m^2$, qualmente richiede il 2.do esempio.

Sia $S^2=\frac{1}{2}$, e $4S^2 = 2$, onde si abbia

$\frac{4-a^2}{4S^2} = \frac{4-a^2}{2} = \frac{1}{4}m^2$. Giungeremo al nostro ricerto ponendo $a^2=\frac{4}{9}$ onde si avrà

$\frac{4-\frac{4}{9}}{2} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9} = m^2$. Non servendo questo valore al problema pongo $a^2 = \frac{2}{25}$, e novo si avrebbe

$\frac{4-\frac{2}{25}}{2} = \frac{98}{2\cdot 25} = \frac{49}{25} = m^2$. Si avrebbe in tal caso $\frac{2V2}{125} - \frac{3V2}{5} + V2 = 0$, ovvero

$\frac{2}{125} - \frac{3}{5} + 1 = 0$, equazione falsa.

Riflessioni sopra la Dissertazione
del Sig.r Ab. Pillizzari.

Riflessioni sopra la Dissertazione del Sig.r Ab. Pellizzari.

Il metodo del primo Paragrafo si potrebbe esporre nella seguente maniera.

Proposta la somma generale

$An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3}$ &c.

di una serie formata dal numero n di termini, avremo la somma della stessa serie sino al numero n-1 di termini, sostituendo n-1 in cambio di n, onde ne risulti

$A(n-1)^m + B(n-1)^{m-1} + C(n-1)^{m-2} + D(n-1)^{m-3}$ &c.

Sottraendo dalla prima la seconda serie, il residuo esprimerà il termine generale

$An^m - A(n-1)^m + Bn^{m-1} - B(n-1)^{m-1} + Cn^{m-2} - C(n-1)^{m-2} + Dn^{m-3} - D(n-1)^{m-3}$ + &c.

ed alzato il binomio n-1 alle indicate potestà si troverà il detto termine generale

$$(M)\ \frac{m}{1}An^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}An^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}An^{m-3} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}An^{m-4} + \&c$$
$$+\frac{(m-1)}{1}Bn^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}Bn^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}Bn^{m-4} - \&c$$
$$+\frac{(m-2)}{1}Cn^{m-3} - \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}Cn^{m-4} + \&c$$
$$+\frac{(m-3)}{1}Dn^{m-4} - \&c$$

Consideri la serie, il cui termine generale

$(N)\ an^{m-1} + bn^{m-2} + cn^{m-3} + dn^{m-4}$ + &c.

e faccio uguale ogni suo membro al corrispondente del termine generale canonico. Avremo primieramente

$mAn^{m-1} = an^{m-1}$, e per conseguenza $A = \frac{a}{m}$.

Sarà in secondo luogo $-\frac{m(m-1)}{1.2}An^{m-2} + \frac{(m-1)}{1}Bn^{m-2} = bn^{m-2}$, o sia ridotto il computo $B = \frac{mA}{1.2} + \frac{b}{m-1}$: ma $mA = a$; dunque $B = \frac{a}{1.2} + \frac{b}{m-1}$. Dongasi in terzo luogo

hanno le prime differenze uguali.

$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2.3\times1.2\times1.2}-\frac{(m-2)(m-3)b}{1.2.3\times1.2}-\frac{(m-3)c}{1.2.3}$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2\times1.2.3.4.}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2\times1.2.3\times1.2}-\frac{(m-2)(m-3)b}{1.2\times1.2.3}$$

$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2\times1.2.3\times1.2}+\frac{(m-2)(m-3)b}{1.2\times1.2\times1.2}+\frac{(m-3)c}{1.2\times1.2}+\frac{d}{1.2}\Big|+\frac{e}{m-4}$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2\times1.2\times1.2\times1.2}$$

$$=-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2.3.4.5.\times1.2.3}+\frac{(m-3)c}{1.2.3\times1.2}+\frac{d}{1.2}+\frac{e}{m-4}.$$

Giacchè la somma della serie, il cui termine generale è

$$(N)\ an^{m-1}+bn^{m-2}+cn^{m-3}+dn^{m-4}+en^{m-5}\ \&c$$

essere dee

$$An^{m}+Bn^{m-1}+Cn^{m-2}+Dn^{m-3}+En^{m-4}\ \&c.$$

si sostituiscano, in cambio di A, B, C &c. i già scoperti valori, e ci si presenterà la somma generale di detta serie

$$(O)\ \frac{an^{m}}{m}+\frac{an^{m-1}}{1.2}+\frac{(m-1)an^{m-2}}{1.2\times1.2.3}\ \ldots\ -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)an^{m-4}}{1.2.3\times1.2.3.4.5}\ \&c.$$

$$+\frac{bn^{m-1}}{m-1}+\frac{b}{1.2}.n^{m-2}+\frac{(m-2)bn^{m-3}}{1.2\times1.2.3}\ \ldots$$

$$+\frac{c}{m-2}.n^{m-2}+\frac{c.n^{m-3}}{1.2}+\frac{(m-3)cn^{m-4}}{1.2\times1.2.3}\ \&c$$

$$+\frac{d}{m-3}n^{m-3}+\frac{dn^{m-4}}{1.2}\ \&c$$

$$+\frac{en^{m-4}}{m-4}\ \&c.$$

Questa somma è composta di infinite serie, nella prima delle quali ci entra a; nella seconda b, nella terza c, &c. Capito l'andamento della prima serie, si intenderà anche quello delle altre, le quali in ciò differiscono che in cambio di a, e di m si colloca gradatamente b, $m-1$; c, $m-2$; d, $m-3$; e, $m-4$ &c. Vediamo se ciò

hanno le prime differenze eguali.

secondi fattori chiusi da due parentesi, sono presi nella seconda serie dal denominatore 2 1.2 della seconda colonna. La terza colonna somministra i secondi fattori dei denominatori e (1.2.3), (1.2×1.2) della terza serie, che è di tre serie composta. Dalla quarta colonna vanno presi i fattori secondi dei denominatori (1.2.3.4.), (1.2.3×1.2) (1.2×1.2.3), (1.2×1.2×1.2) della serie quarta che è di quattro serie formata, e così di seguito.

Passo a dir qualche cosa intorno all'uso della somma generale: Quante unità si contengono in n, tanti termini deve avere il termine generale, e la somma. Se sia per esempio n = 3, il termine generale si esprimerà per an^2+bn+c, e la somma per An^3+Bn^2+Cn o sia per

$$\frac{an^3}{3}+\frac{an^2}{1.2}+\frac{an}{1.2.3}$$
$$+\frac{bn^2}{2}+\frac{bn}{1.2}$$
$$+cn$$

Pongasi a = b = c = 1, e ne nascerà la serie 3, 7, 13, 21, 31, 43, la cui somma $= \frac{n^3}{3}+n^2+\frac{5}{3}n$. Quando n = 1 si troverà la somma = 3, se n = 2 corrisponderà la somma $= \frac{4}{3}+4+\frac{10}{3} = 10$

Se nel termine generale fosse c = 0, si avrebbe la somma $S = \frac{an^3}{3}+\frac{an^2}{2}+\frac{an}{6}$ $+\frac{bn^2}{2}+\frac{bn}{2}$

e mettendo come sopra a = b = 1, ne nascerebbe la serie 2, 6, 12, 20, 30, 42 la cui somma $\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{2}{3}n$

Dato che fosse b = 0, ed a = c = 1,

il termine

hanno la prima differenza uguale.

In riguardo ai segni del più, e del meno, se un secondo fattore di una colonna dispari si prende da una colonna pari, il termine ritiene quel segno, che ha nella colonna pari; e se si prenda da una colonna impari, nel termine si muta il segno. Al contrario se un secondo fattore di una colonna pari si sceglie da una colonna pari, si cangia il segno; e se si sceglie da una colonna impari, nel segno non si fa mutazione. In effetto quivi i segni della medesima serie vanno sempre alternando.

$\frac{an^3}{3}$. Dotto che sia $a=3$, il termine generale $3n^2-3n+1$ determinerà la serie 1, 7; 19, 37, 61 &c. di cui la somma $= n^3$.

Se $m=1$, il termine generale an^{m-1} $= a$; che è costante dimanda la serie a, a; a, &c. in cui la differenza fra i termini prossimi si ragguaglia a nulla.

Stabilito $m=2$, si ha il termine generale $an+b$ producente la serie $a+b$, $2a+b$, $3a+b$ &c, le cui differenze prime fra i termini prossimi pareggiano la costante a.

Ritenendo m = 3, il termine generale an^2+bn+c vuole la serie $a+b+c$, $4a+2b+c$; $9a+3b+c$, $16a+4b+c$, $25a+5b+c$ &c.

Le prime differenze fra i termini contigui, formano la serie $3a+b$, $5a+b$; $7a+b$, $9a+b$ &c. le cui differenze fra i termini prossimi sono costanti, ed $= 2a$. Quindi ad $m=3$ corrispondono progressioni colle seconde differenze costanti.

Generalmente col metodo spiegato si sommano le serie, che hanno costanti le differenze $m-1$, e di tal natura sono tutte le serie algebraiche non frazionarie.

hanno la prima differenza ugu–

Riflessioni sopra la Dissertazione del Sig.r Al. Palazzari

Si esporrà il metodo nella seguente maniera.

Proposta la somma generale

$$An^{m} + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3} + \&c.$$

di una serie formata dal numero n di termini, avremo la somma della stessa serie sino al numero n−1 di termini, sostituendo n−1 in cambio di n, onde ne risulterà

$$A\overline{n-1}^{m} + B\overline{n-1}^{m-1} + C\overline{n-1}^{m-2} + D\overline{n-1}^{m-3} + \&c.$$

Sottraendo dalla prima la seconda serie, il residuo esprimerà il termine generale

$$An^{m} - A\overline{n-1}^{m} + Bn^{m-1} - B\overline{n-1}^{m-1} + Cn^{m-2} - C\overline{n-1}^{m-2} + \&c.$$

ed alzato il binomio n−1 alla indicate potestà, si troverà il detto termine generale

$$(M)\ \frac{m}{1}An^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}An^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}An^{m-3} - \&c.\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}An^{m-4}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}Bn^{m-2} - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}Bn^{m-3} + \&c.\ \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}Bn^{m-4}$$
$$+ (m-2)Cn^{m-3} - \&c.\ \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}Cn^{m-4}$$
$$\&c. \qquad + \&c.\ (m-3)Dn^{m-4}$$

Per cominciare la somma delle serie algebraiche, debba sommarsi la serie $a + a + a + a$ &c, il cui termine costante a. Considerato questo termine generale come di un solo termine, lo pongo al confronto col primo del termine generale M e formo l'equazione $a = mAn^{m-1}$, la quale mi insegna essere $m-1 = 0$, ossia $m = 1$ e per conseguenza $a = A$, e generalmente $A = \frac{a}{m}$. Ora dovendo essere la somma della serie $= An^{m}$, sostituiti i valori determinati di A, e di m, la troveremo $= an$

Considero in secondo luogo la serie, il cui termine generale $an + b$, che hanno le prime differenze uguali.

membri dei termini generali dato, e cercato, a noi si presenta la formola
$c = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} A n^{m-3} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} B n^{m-3}$
$+ (m-2) C n^{m-3}$, e ponendo in luogo di m, A, B i rispettivi valori 3, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{2}$,
$c = \frac{a}{3} - \frac{a}{2} + C$, e finalmente $C = c + \frac{a}{2} - \frac{a}{3}$

Dunque la somma della nostra serie, eguagliandosi ad $An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2}$ colla sostituzione dei competenti valori la scopriremo $= \frac{a}{3} n^3 + \frac{a}{2} n^2 + \frac{c + a - a}{2 \;\; 3} n$

Sia per esempio $a = 1$, $c = 1$, e ne proverrà la serie
$2, 5, 10, 17, 26, 37$ &c, la cui somma $\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6}$

Se il termine generale fosse $an^2 + bn + c$ il qual esprime tutte quelle serie, che hanno le seconde differenze costanti, si troverebbe come sopra $m = 3$, $A = \frac{a}{3} = \frac{a}{m}$
Istituita l'equazione fra i secondi membri, si avrà
$bn = -m\frac{(m-1)}{2} A n^{m-2} + (m-1) B n^{m-2} =$
nagli esponenti. Sostituiti in vece di m, e di A, i valori scoperti 3, $\frac{a}{3}$, ed espressi si avrà $B = \frac{a}{1\cdot 2} + \frac{b}{m-1}$
$= \frac{a+b}{2}$.

L'equazione fra i terzi membri ci dà
$c = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} A n^{m-3} - \frac{(m-1)(m-2)}{2} B n^{m-3}$
$+ (m-2) C n^{m-3}$ e collocato in cambio negli esponenti il suo valore 3, e in vece di m, A, B i convenienti eguali valori, $C = \frac{(m-1)a}{1\cdot 2 \times 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{b}{1\cdot 2} + \frac{c}{m-2}$
$c = \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - \frac{a}{2} + C$, e finalmente ponendo in luogo di m la grandezza particolare 3
$C = \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c$.

equazione $d = -\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} A n^{m-4}$ $+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} B n^{m-4} - \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} C n^{m-4}$ $+(m-3) D n^{m-4}$; essendo $n^{m-4} = 1$; e sostituito in vece di A, B, C i valori generali già determinati, avremo

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)a}{1.2.3.4} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}\cdot\overline{\frac{a}{1.2}+\frac{b}{m-1}}$$

$$+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\cdot\overline{\frac{(m-1)a}{1.2.1.2.3}+\frac{b}{1.2}+\frac{c}{m-2}}+d=(m-3)D$$

Quella formola apprezzata si riduce alla seguente

$$D = \frac{(m-2)b}{1.2\times 1.2.3} + \frac{c}{1.2} + \frac{d}{m-3} = \frac{b}{6}+\frac{c}{2}+d$$

Avremo pertanto la somma =

$$An^m + Bn^{m-1} + Cn^{m-2} + Dn^{m-3} =$$

$$\frac{an^m}{m} + \overline{\frac{a}{1.2}+\frac{b}{m-1}}\cdot n^{m-1} + \overline{\frac{(m-1)a}{1.2.1.2.3}+\frac{b}{1.2}+\frac{c}{m-2}}\cdot n^{m-2}$$

$$+\overline{\frac{(m-2)b}{1.2.1.2.3}+\frac{c}{1.2}+\frac{d}{m-3}}\cdot n^{m-3} =$$

$$\frac{an^4}{4} + \overline{\frac{a}{2}+\frac{b}{3}}\cdot n^3 + \overline{\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}\cdot n^2 + \overline{\frac{b}{6}+\frac{c}{2}+d}\cdot n$$

La predetta somma generale si potrebbe ordinare così

$$\begin{array}{llll}
\frac{an^m}{m} & +\frac{a}{1.2}n^{m-1} & +\frac{(m-1)a\,n^{m-2}}{1.2.1.2.3} & \\
 & +\frac{b}{m-1}n^{m-1} & +\frac{b}{1.2}\cdot n^{m-2} & +\frac{(m-2)b\cdot n^{m-3}}{1.2.1.2.3} \\
 & & +\frac{c}{m-2}\cdot n^{m-2} & +\frac{c}{1.2}\cdot n^{m-3} \\
 & & & +\frac{d}{m-3}\cdot n^{m-3}
\end{array}$$

Sia $a=b=c=d=1$, e dal termine generale an^3+bn^2+cn+d ne nascerà la serie 4, 15, 40, 85, 156, ecc. la cui somma $\frac{n^4}{4}+\frac{5n^3}{6}+\frac{5}{4}n^2+\frac{5}{3}n$

Rettificazione della pagina

Esprimendo con x, y, s l'ascissa, l'ordinata, ed il cammino della nostra curva, avremo conforme è noto $dx = \frac{a\,dy}{y}$, $ds^2 = dx^2+dy^2$, e ponendo in cambio di dx^2 il suo valore dopo le necessarie operazioni $ds = \sqrt{a^2+y^2}\cdot\frac{dy}{y} = \sqrt{a^2+y^2}\cdot\frac{y\,dy}{y^2}$.

Faccio $\sqrt{a^2+y^2} = z$ locchè mi dà $a^2+y^2 = z^2$, $y^2 = z^2-a^2$, $y\,dy = z\,dz$, e sostituendo avrò $ds = \frac{z^2dz}{z^2-a^2} = \frac{a^2dz}{z^2-a^2} + dz$

La frazione $\frac{a^2dz}{z^2-a^2}$ si divide nelle due

$\frac{a\,dz}{2\cdot\overline{z-a}} - \frac{a\,dz}{2\cdot\overline{z+a}}$, e quindi ci si avrà

$$ds = \frac{a\,dz}{2\cdot\overline{z-a}} - \frac{a\,dz}{2\cdot\overline{z+a}} + dz$$

Passando alla integrazione avremo aggiunta la costante g, avremo

$$g + s = \frac{1}{2}\,l\,\overline{z-a} - \frac{1}{2}\,l\,\overline{z+a} + z$$

essendo a la sottotangente della nostra Logistica. Sia $s = 0$ quando $z = b$ e conseguentemente $y = \sqrt{b^2-a^2}$. Dietro questa supposizione noi ritroveremo il valore della costante $g = \frac{1}{2}\,l\,\overline{b-a} - \frac{1}{2}\,l\,\overline{b+a} + b$ onde si otterrà la corretta equazione

$$s + b - z = \frac{1}{2}\,l\,\overline{b+a} - \frac{1}{2}\,l\,\overline{z+a} + \frac{1}{2}\,l\,\overline{z-a} - \frac{1}{2}\,l\,\overline{b-a}$$

e supponendo $l\,1 = 0$

$$s + b - z = l\sqrt{\frac{\overline{b+a}\cdot\overline{z-a}}{\overline{b-a}\cdot\overline{z+a}}}$$ e nella ipotesi

$l\sqrt{b^2-a^2} = 0$, $s + b - z = l\,\frac{\overline{b+a}\sqrt{z-a}}{\sqrt{z+a}} = l\,\frac{\overline{b+a}\sqrt{z^2-a^2}}{z+a}$

ma $\sqrt{z^2-a^2} = y$, dunque $l\,\frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a} = s + b - z$

o sia $s = l\,\frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a} + z - b$.

Dimostrazione

Dalla similitudine dei triangoli GZC, HZI si deduce l'analogia

$GZ : CZ :: GH : CI$

$z+a : y :: b+a : \frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a}$

la quale determina $CI = LK = \frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a}$.

e in virtù di ciò sarà $AL = \int \frac{\overline{b+a}}{z+a} y$.

Ad AL si aggiunga $LM = HZ = z-b$,

e ne risulterà $AM = \int \frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a} + z - b$;

ma $\int \frac{\overline{b+a}\cdot y}{z+a} + z - b = s'$, a norma della

nostra tale equazione. Dunque

$AM = s' = BKZ$; il che &c.

Corollario

La rettificazione della logistica esponenziale

fatta costruzione della medesima curva.

Esame del Problema sciolto
dal Signor Abate
Pessuti

Esame del Problema sciolto dal Sig.r Ab. Dassuti
Determinare tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo

1. Si abbia un qualunque numero positivo a, e se ne cerchino i suoi logaritmi. Si prenda dal Teorema precedente l'equazione $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l.\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$, e supponendo in essa il raggio $a=1$, e la tangente $z=0$, si avrà $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$. Ma chiamando p la mezza circonferenza, la tangente $z=0$ corrisponde agli archi $0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p$ &c., ed in generale agli archi mp, intendendo per m qualunque numero intero positivo o negativo; dunque si avrà $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$, e però $l1 = 2mp\sqrt{-1}$; cioè sarà $l1 = 0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c. appunto come si dimostra da Eulero nel Probl. 1. della sua Memoria.

Dunque essendo $A = la$, sarà $la = la.1 = la + l1 = A,\ A \pm 2p\sqrt{-1},\ A \pm 4p\sqrt{-1},\ A \pm 6p\sqrt{-1}$ &c.

Annotazione I.

Essendo $l1 = 2mp\sqrt{-1}$, fatto $m=0$, avremo $l1 = 0\sqrt{-1}$. In questo caso i Sig.ri Eulero, e Dassuti suppongono $l1 = 0$, cioè a dire $l1$ uguale ad un nulla reale, mentre effettivamente si uguaglia ad un nulla immaginario. In tal circostanza abbiamo $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot 0\sqrt{-1} = \frac{0}{2}$;

e

$2l-\sqrt{-1} = l-1 = (4mp - 180^\circ).\sqrt{-1}$ . .

Essendosi adunque trovato ancora poco anzi $l-1 = (4mp+180^\circ).\sqrt{-1}$, sarà generalmente $l-1 = (4mp \pm 180^\circ).\sqrt{-1} = (4m \pm 1)p\sqrt{-1}$. Sostituendo dunque successivamente in luogo di m tutti i numeri interi positivi e negativi, sarà $l-1 = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}, \pm 7p\sqrt{-1}$ &c. come per altra via aveva ritrovato Eulero nel Probl. 2. della sua Memoria..........

Quindi, come sopra, essendo $A = la$, si avrà $l-a = la.-1 = la + l-1 = A \pm p\sqrt{-1}, A \pm 3p\sqrt{-1}, A \pm 5p\sqrt{-1}$ &c., donde apparisce che i logaritmi delle quantità negative sono tutti immaginarj.

Annotazione II.

Il Sig. Ab. Bassano ha dedotta l'equazione $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$ dal disporre la formola differenziale $du = \frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$ nella seguente maniera $du = \frac{\frac{1}{2} a dz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2} a dz}{a-z\sqrt{-1}}$. Si può essa parimente disporre così $du\sqrt{-1} = \frac{\frac{1}{2} a dz}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2} a dz}{z+a\sqrt{-1}}$, ed integrandola avremo $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\left(l(z-a\sqrt{-1}) - l(z+a\sqrt{-1})\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}\right)$. Moltiplicando per $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ scopriremo $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{-a+z\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{-a-z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$

$b\sqrt{-1}$ ... $l\sqrt{-1} = l1$; e poiché per certo numero $(180^{\circ} + 4mp)\sqrt{-1} = l-1$, sarà $l\pm1 = (180^{\circ} + 4mp)\sqrt{-1}$.

Facendo nella mia formola $z = -a = -1$, si scoprirà collo stesso metodo $l1 = (-180^{\circ} + 4mp)\sqrt{-1}$, ed essendo pel num.° II. $l-1 = (-180^{\circ} + 4mp)\sqrt{-1}$, avremo per conseguenza $l\pm1 = (\pm180^{\circ} + 4mp)\sqrt{-1} = (4m\pm1)p\sqrt{-1}$, equazione, che unisce le due ipotesi di $z = \pm1$. Sostituiti ordinatamente in luogo di m tutti i numeri interi positivi e negativi si troverà $l\pm1 = \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1}$, $\pm 7p\sqrt{-1}$ &c., e si inferirà competere a ±1 i medesimi logaritmi.

Posto $A = l\pm a$, si avrà $l\pm a = la\cdot\pm1 = la + l\pm1 = A \pm p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm 5p\sqrt{-1}$, $A \pm 7p\sqrt{-1}$ &c.

III. Finalmente facendo nella formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$ la quantità $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ eguale ad una qualunque data quantità immaginaria, si determinerà la tangente z dell'arco u, e quindi l'arco medesimo, conosciuto il quale per mezzo dell'accennata formola, si avrà facilmente il logaritmo di $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$, cioè della proposta quantità immaginaria.

Ed in fatti egli è noto, che la più complicata quantità immaginaria può sempre ridursi a questa forma:

come luogo della suppos. $u = a\cdot\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1}$ in luogo di $\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$, e con ciò si avrà $\frac{1}{2}q + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.(\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1})$, e però $l(\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$. Sarà dunque finalmente $l(A + B\sqrt{-1}) = lC + l(\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1}) = lC + (q + 2mp)\sqrt{-1}$, cioè sostituendo successivamente in luogo di m tutti i numeri interi positivi o negativi; sarà $l(A+B\sqrt{-1}) = lC + q\sqrt{-1}$; $lC + (q \pm 2p)\sqrt{-1}$, $lC + (q \pm 4p)\sqrt{-1}$ &c. appunto come trovò l'Eulero nel Probl. 3. della lodata Memoria.

Annotazione III.

Applico alla mia formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-1-2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$ il metodo del Sig.r Ab. Dessuti. Avendo egli dimostrato essere $l(A+B\sqrt{-1}) = lC + l(\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1}) = lC + l(-\cos q - \text{sen}\, q\sqrt{-1})$ basterà trovare tutti i logaritmi di $-\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1}$ per aver anche quelli di $A + B\sqrt{-1}$.

Si faccia pertanto $-\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1} = \frac{-1-2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$, e si avrà $-\cos q + \text{sen}\, q\sqrt{-1} + 2\cos q\sqrt{-1} + 2\,\text{sen}\, q = -1 - 2\sqrt{-1}$, ed eguagliando la porzione reale del primo membro colla reale del secondo, e l'immaginaria colla immaginaria, ne risulteranno le due equazioni $-\cos q + 2\,\text{sen}\, q = -1$, $\text{sen}\, q + 2\cos q = -2$, la prima delle quali darà

esprimendo i un numero infinitamente piccolo, debba essere il logaritmo iperbolico di $1+i$ eguale ad i; donde si avrà $l(1+i)^2 = 2i$, $l(1+i)^3 = 3i$, ed in genere $l(1+i)^n = ni$. Ora siccome i è infinitamente piccola, bisognerà supporre l'esponente n infinito, acciò $(1+i)^n$ possa divenire eguale ad un qualunque numero dato x diverso da 1. Sia y il logaritmo di x, e si avranno le due equazioni $(1+i)^n = x$, ed $y = lx = l(1+i)^n = ni$. Dalla prima si caverà $i = x^{\frac{1}{n}} - 1$; e questo valore di i essendo sostituito nella seconda darà $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, ovvero $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - x = 0$; equazione che servirà a determinare il logaritmo y, allorchè sarà dato il numero x.

Ed in fatti supponghiamo che si cerchi il logaritmo di 1. Sarà dunque $x = 1$, e però $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1 = \left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1^n = 0$. Ora essendo dimostrato che la formola $z^n - a^n$ ha per fattore $z^2 - 2az\cos.\frac{2mp}{n} + a^2$, intendendo per m e p le medesime quantità di sopra, i fattori di $\left(1+\frac{y}{n}\right)^n - 1^n = 0$ saranno similmente $\left(1+\frac{y}{n}\right)^2 - 2\cos.\frac{2mp}{n}\left(1+\frac{y}{n}\right) + 1 = 0$, donde si ricava $1+\frac{y}{n} = \cos.\frac{2mp}{n} \pm \text{sen}.\frac{2mp}{n}\sqrt{-1}$. Ma essendo n infinito, sarà $\frac{2mp}{n}$ un archetto infinitesimo, e però $\cos.\frac{2mp}{n} = 1$, e $\text{sen}.\frac{2mp}{n} = \frac{2mp}{n}$. Si avrà dunque $1+\frac{y}{n} = 1 \pm \frac{2mp}{n}\sqrt{-1}$, e quindi y, cioè $l1 = \pm 2mp\sqrt{-1}$, e $la = la + l1 = la$

±

piccioli, né reali; condizioni nondimeno necessarie, acciò sia vera l'equazione $l(1+i)=i$, che si assume da Eulero come principio fondamentale della sua soluzione ».

Se queste mie obbiezioni si giudicassero di qualche peso, bisognerebbe dire in quel caso che il grande Eulero avesse fatta la sua bella scoperta per altra via differente da quella, per cui si è poi compiaciuto di dimostrarla. Sia però comunque, la scoperta è una delle più belle e delle più importanti; ed Eulero stesso la riguardava come tale. Questo grande Uomo, che ho avuto la sorte di ammirar da vicino, e con cui posso vantarmi di essere unito coi vincoli della più cordiale amicizia e delle più grandi obbligazioni, mi disse con un sentimento di vero piacere, che avendo comunicato il suo ritrovato a Gio. Bernoulli poco prima della sua morte, questo buon Vecchio gli rispose ch'egli moriva contento, poiché vedeva conciliati que' paradossi apparentemente insolubili, che aveano mossa ed alimentata per sì lungo tempo la gran disputa dei logaritmi dei numeri negativi fra Leibnitz e lui ».

Annotazione IV.

Io tengo cinque lettere dell'Ab.

Arcati

Or assunta $x = 1$ come protonumero, abbiamo $l.1 + dx = dy$, e quando $dx = dy = 0$ $l.1 = 0$, unico valore reale, che gli compete; il quale non esclude gli infiniti valori immaginarj, che esige la natura della formola trascendente $\frac{dx}{x} = dy$.

Se il Sig.r Giovanni Bernoulli avesse avuto agio di esaminare la bella scoperta del Sig.r Eulero, si sarebbe accorto, che ridotta la stessa a tutta l'estensione, di cui è capace, serviva a far toccare con mano essere comune a due numeri eguali; uno positivo e l'altro negativo non solo l'unico logaritmo reale relativo ad un dato protonumero, ma ancora gli infiniti immaginarj. Questa proprietà si estende altresì ai numeri immaginarj positivi e negativi, che sendo eguali richiedono i medesimi logaritmi, uno de' quali può esser reale, e gli altri tutti immaginarj.

Segue il num.o III.

Sosteneva Gio. Bernoulli che i logaritmi dei numeri negativi erano i medesimi che i logaritmi dei numeri positivi, o sia che $l{-a} = l{+a}$; poiché diceva egli, essendo $(-a)^2 = (+a)^2$, sarà ancora $l(-a)^2 = l(+a)^2$, cioè $2l{-a} =$

$2l{+a}$

la iperbola fra gli assintoti segnata nella fig. 1. ove posto AB protonumero, l'aja CBDa esprimerà il logaritmo corrispondente al numero AD: essendo l'aja CBQ infinita, si vede che al numero infinito AQ si riferirà il logaritmo infinito CBQ. Il perchè l'aje crescenti da B verso Q determinano i logaritmi cominciando dal protonumero, e terminando nel numero infinito; onde ne risulta la porzione di ramo BH (fig. 2.) dalla parte dei numeri positivi maggiori del protonumero AB, i logaritmi dei quali sono positivi. Sia (fig. 1.) il numero A7 minore del protonumero AB, ed essendosi considerata la AD come positiva, le B7 devono assumersi come negative; e quindi l'aja negativa CB7G sarà il logaritmo del numero A7 minore del protonumero; e poichè al numero $=0$ corrisponda l'aja negativa infinita CBAP, si scopre, che $l0 = -\infty$, e che l'aje negative CB7G, che cominciano dal nulla, e vanno a terminare nell'infinito, rappresentano i logaritmi dei numeri, che principiano dal protonumero AB e vanno a terminare nel nulla. Ne nascerà pertanto la porzione di ramo BK (fig. 2.), che serve ai numeri decrescenti, i cui logaritmi sono negativi.

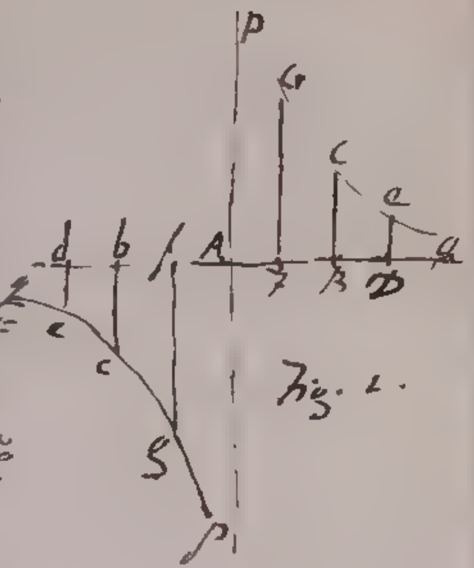


Fig. 1.

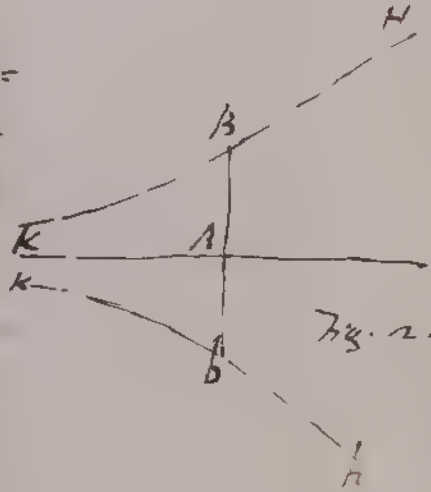


Fig. 2.

Divenga

l'altro negativo compete il medesimo logaritmo. Ne nascerà conseguentemente porzione di ramo inferiore bh (fig. 2.) uguale al superiore BH, e quindi la logistica sarà formata dai due rami KBH, kbh forniti della proprietà, che allo stesso logaritmo reale corrispondono costantemente due numeri reali uguali uno positivo e l'altro negativo.

Essendo geometricamente dimostrato $l{-a} = la$, ed avendo la logaritmica la proprietà, che ad un numero medio geometrico fra due dati si appropri un logaritmo medio aritmetico fra quelli, che ai predetti numeri si confanno, ne segue dover essere $l \pm a\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l{-a} + \frac{1}{2} la$. Se $\mp a$ ricevono lo stesso logaritmo, sarà $l \pm a\sqrt{-1} = l \pm a$. Ma se a $\mp a$ si adattino diversi logaritmi, non si avvererà la formola $l \pm a\sqrt{-1} = l \pm a$, che è particolare, ma bensì la generale $l \pm a\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l{-a} + \frac{1}{2} la$.

Sia $a = \pm 1$, i cui logaritmi 0, $\pm\sqrt{-1}\cdot p$, $\pm\sqrt{-1}\cdot 2p$, $\pm\sqrt{-1}\cdot 3p$, $\pm\sqrt{-1}\cdot 4p$ &c. Facciasi $l1 = 0$, $l{-1} = p\sqrt{-1}$, onde si abbia $l \pm \sqrt{-1} = \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} p\sqrt{-1} = \frac{1}{2} p\sqrt{-1}$. Avremo dunque in tal caso $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : \frac{1}{2} p\sqrt{-1} :: 1 : \frac{1}{2} p$ che è quanto a dire come il raggio

al

non può sussistere l'equazione di Gio Bernoulli $l-a = la$, donde si deduca $l-1 = l1 = 0$, ricorre Leibnitz alla nota equazione della logaritmica $a^y = x$, in cui a rappresenta un qualunque numero dato, ed y il logaritmo del numero x. Ora questa equazione non potrà mai dare $a^y = -1$, sia che facciasi $y = 0$, ovvero y eguale a qualunque quantità reale positiva o negativa. Dunque non solamente non si ha $l-1 = l1 = 0$, ma si dimostra altresì con questo, che $l-1$, e però anche $l-a = la + l-1$, non può in verun modo essere una quantità reale. Si tralasciano per brevità le altre ingegnose ragioni che da ambe le parti si allegavano in prova delle loro opinioni, e che il lettore, volendo, potrà leggere nella lodata Memoria di Eulero il quale, avanti di venire alla soluzione della quistione, fa minutamente ed a lungo tutta la storia di essa. Frattanto da quel poco che si è detto si vedrà bastantemente che le contraddizioni le quali si incontrano nelle due opinioni sono tante e tali, che sembra affatto impossibile di poterle conciliare, dal che, se fosse vero, les ennemis des Mathematiques, dice Eulero, ne manqueroient pas de tirer des consequences bien facheuses contre la certitude de cette Science. Car quand les Pyrrhoniens ont attaqué les sciences,

on

In fatti essendoci nella logistica infinite coppie di coordinate, non ci è ragione di scegliere le due f, e, e di escludere tutte l'altre. Qual maraviglia dunque, che questa scelta arbitraria ristringa l'equazione, di modo che ci somministri il solo ramo KBH?

Mi è caduto quindi in pensiero di sostituire alle coordinate 1, e f, fornite di un costante valore, le due h, g infinitiformi, cioè a dire capaci di infiniti valori relativi, onde ne provenga la formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{y/h} = x$. Affermo pertanto, che a qualunque logaritmo y corrispondono i due numeri $\pm x$. E vaglia il vero, io posso sempre determinare un tal valore di h, che si riferisca ad y come il numero pari n all'impari m onde si abbia $\frac{y}{h} = \frac{m}{n}$, e perciò $f\left(\frac{g}{f}\right)^{y/h}$ $= f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{m}{n}} = f \cdot \pm\sqrt[n]{\left(\frac{g}{f}\right)^{m}} = x$. Per la qual cosa, scelte le opportune grandezze delle coordinate infinitiformi h, g, io otterrò sempre che sia $f \cdot \pm\left(\frac{g}{f}\right)^{y/h} = \pm x$, e col mezzo tanto della quadratura dell'iperbola, quanto dell'equazione esponenziale della logistica dimostrerò, che una tal curva è composta dei due rami reali, ed eguali KBH, kbh.

Egli è dunque certo, che posto il protonumero $f = 1$, il nulla è un

valor

eguale ad alcuni di essi, e $2l.+a$ eguale ad alcuni altri, senza che sia necessario supporre $2l.-a = 2l.+a$, e $l.-a = l.+a$. Ora si è dimostrato nel Probl. precedente che essendo A il logaritmo reale di a, e però $2A$ il logaritmo reale di a^2, si deve avere $l.+a = A$,
$A \pm 2p\sqrt{-1}$, $A \pm 4p\sqrt{-1}$, $A \pm 6p\sqrt{-1}$, $A \pm 8p\sqrt{-1}$ &c.
$l.-a = A \pm p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm 5p\sqrt{-1}$,
$A \pm 7p\sqrt{-1}$ &c. ovvero
$2l.+a = 2A$, $2A \pm 4p\sqrt{-1}$, $2A \pm 8p\sqrt{-1}$,
$2A \pm 12p\sqrt{-1}$, $2A \pm 16p\sqrt{-1}$ &c.
$2l.-a = 2A \pm 2p\sqrt{-1}$, $2A \pm 6p\sqrt{-1}$
$2A \pm 10p\sqrt{-1}$, $2A \pm 14p\sqrt{-1}$ &c.
e tutti questi infiniti valori di $2l.+a$, e di $2l.-a$ sono appunto tutti gli infiniti valori di $l.a^2$; perchè essendo $2A$ il logaritmo reale di a^2, dovrà essere per il Probl. preced.
$l.a^2 = 2A$, $2A \pm 2p\sqrt{-1}$, $2A \pm 4p\sqrt{-1}$,
$2A \pm 6p\sqrt{-1}$, $2A \pm 8p\sqrt{-1}$, $2A \pm 10p\sqrt{-1}$
$2A \pm 12p\sqrt{-1}$, $2A \pm 14p\sqrt{-1}$, $2A \pm 16p\sqrt{-1}$ &c.

Dunque benchè nessuno dei valori di $2l.+a$ confronti con nessuno dei valori di $2l.-a$, si ha nondimeno tanto $2l.+a$, quanto $2l.-a$ eguale a $l.a^2$.

Similmente se nella formula che abbiamo trovata nel probl. preced. $l(\cos. q + \text{sen}. q\sqrt{-1}) = (q + 2mp)\sqrt{-1}$ si farà l'angolo $q = 90° = \frac{1}{2}p$, essendo allora $\cos. q = 0$, $\text{sen}. q = 1$, si avrà $l.+\sqrt{-1} = (\frac{1}{2}p + 2mp)\sqrt{-1}$, donde gli infiniti valori di $l.+\sqrt{-1}$ saranno

$\frac{1}{2}p\sqrt{-1}$

essere ancora necessariamente $l.-a + l.-a = l.+a + l.+a$, o sia $2l.-a = 2l.+a$, e però $l.-a = l.+a$: Ma si risponderà come prima, che se ancora possa il valore di $l.-a$ prendersi per $l.+a$, dalla equazione $l.-a + l.-a = l.+a + l.+a$ nascerebbe allora necessariamente l'altra $2l.-a = 2l.+a$; ma essendo infiniti i valori di $l.-a$ e di $l.+a$, perchè l'equazione $l.-a + l.-a = l.+a + l.+a$ sia vera altro non si richiede se non che la somma di due valori qualunque di $l.-a$ si trovi sempre eguale alla somma di due altri valori di $l.+a$. Ora questo appunto sempre si verifica; perchè se nella serie $A \pm p\sqrt{-1}$, $A \pm 3p\sqrt{-1}$, $A \pm 5p\sqrt{-1}$, $A \pm 7p\sqrt{-1}$, $A \pm 9p\sqrt{-1}$ &c. che rappresenta gli infiniti logaritmi di $-a$, si prendano due termini qualunque, la loro somma sarà sempre eguale alla somma di due termini da prendersi nella serie A, $A \pm 2p\sqrt{-1}$, $A \pm 4p\sqrt{-1}$, $A \pm 6p\sqrt{-1}$, $A \pm 8p\sqrt{-1}$ &c. rappresentante gli infiniti logaritmi di $+a$. Così la somma dei termini $A + 3p\sqrt{-1}$, $A - 5p\sqrt{-1}$ della prima serie è eguale alla somma dei termini A, ed $A - 2p\sqrt{-1}$ della seconda &c.

Annotazione VII.

Non vi ha dubbio, che le contraddizioni che s'incontrano nelle due opinioni del Bernoulli, e del Leibnitz nascono dalla supposizione di amendue i partiti, che ad ogni numero non

metà di $la^2 = 2A+2p\sqrt{-1}$, però avrò una serie aritmetica di logaritmi, 0; $A+p\sqrt{-1}$, $2A+2p\sqrt{-1}$, alla quale dee corrispondere per la natura della logistica una serie geometrica di numeri, che si ottiene prendendo una media geometrica fra 1 ed a^2: ma questa media si agguaglia a, $\pm a$; dunque ad amendue la serie geometrica di numeri 1, $+a$, a^2; 1, $-a$, a^2 si riferisce la stessa serie aritmetica di logaritmi 0; $A+p\sqrt{-1}$, $2A+2p\sqrt{-1}$, e per conseguenza $l\pm a = A+p\sqrt{-1}$. Se fosse vero quello che sostiene il nostro Autore, bisognerebbe dire, che assegnato a la^2 il valore $2A+2p\sqrt{-1}$, io dovessi prendere fra 1, ed a^2 la sola media geometrica $-a$; perchè $A+p\sqrt{-1} = l-a$, e non a la, ed assegnato a la^2 il valore $2A+4p\sqrt{-1}$, io dovessi prendere fra 1, ed a^2 la sola media geometrica $+a$; perchè $A+2p\sqrt{-1} = la$, e non a $l-a$. Ma dall'estensione da me data al mentovato problema deducendosi chiaramente, che a $l\pm a$ competono gli stessi valori; ne segue che fra i numeri 1, a^2 mi è sempre concesso di collocare l'una e l'altra

media

Si eviterà il disordine assegnando a $l{\pm}a$ un solo valore, che sia la metà di quello di la^2, onde sendo $l+a = \frac{1}{2} la^2$, $l-a = \frac{1}{2} la^2$, si abbia per conseguenza $la = l-a$. Stabilito a la^2 un dato valore, è parimente determinato il relativo valore di $l{\pm}a$; e variandosi quello, si cangia anche questo, essendo capaci la^2, e $l{\pm}a$ di infiniti valori relativi.

Fine del num.ro III. ed ultimo.

Ma è tempo ormai di dar fine a questa lunga digressione; con aggiungere soltanto la ragione, che ci ha mosso a dire che l'Ab. Riccati non doveva aver notizia di questa bella scoperta di Eulero sulla natura dei logaritmi. Dopo di avere egli dimostrato in questo § 2. della sua lettera, che un arco di circolo può esser espresso da $\sqrt{-1}$. l±, soggiunge immediatamente: se alcuno si pensasse di aver ridotto l'arco ad un logaritmo reale moltiplicato per $\sqrt{-1}$ si ingannerebbe d'assai, perchè questo è tanto impossibile, quanto che una quantità reale uguagli un'immaginaria, e qui egli si diffonde a provare che la quantità 1 è immaginaria, e che però l'arco circolare si trova eguale al logaritmo immaginario di un

numero

non solo ebbe notizia della lodata
Memoria dell' Eulero, ma di essa
ne fece un attento esame nella quarta
Lettera sopra i logaritmi dei numeri
negativi scritta li 2. Ottobre 1767.
Due proposizioni egli dice: la pri=
ma, che nell'espressione dell'arco
circolare $\sqrt{-1}\, l\,{-1}$ il logaritmo di -1
ha da essere immaginario, e questa
è vera senz'alcun dubbio: la secon=
da, ch'esser dee immaginario an=
che il numero -1. Ad una tale as=
serzione l'ha indotto non la credenza
che ad un numero reale non pos=
sano competere logaritmi imma=
ginarj, ma bensì l'equazione
$t = a\left(\frac{z^2 - a^2 + 2az\sqrt{-1}}{z^2 + a^2}\right)$, nella quale
apparisca dover essere sempre
immaginario il valore di t. Della
predetta equazione ne ho già par=
lato, ed ho fatto vedere, che t può
essere quantità reale in due casi,
cioè quando $z = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$.

Integrare la formola $dt = \frac{\sqrt{m} \cdot k\,ds}{2\sqrt{ES - pds}}$

racciо

Soluzione
Del Problema proposto dal. P.
Vincenzo Riccati l'anno 1767.
Si aggiunge la Soluzione di
altri Problemi analoghi.

Soluzione del Sig. D. Pellizzari del Problema.

Integrare la formola $Cc.n\varphi . d.Sc.m\varphi$.

Riduca la formola proposta alle quantità esponenziali, valendomi delle espressioni stabilite dall'Eulero nella sua Introduzione (tomo 1 n. 139), e supponendo il raggio del circolo $= a$, trovo $Cc.n\varphi = a.\frac{e^{\frac{n\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{-n\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2}$, e
$Sc.m\varphi = a\left(\frac{e^{\frac{m\varphi\sqrt{-1}}{a}}-e^{\frac{-m\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2\sqrt{-1}}\right)$, e perciò sarà differenziando
$d.Sc.m\varphi = md\varphi\left(\frac{e^{\frac{m\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{-m\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2}\right)$, e fatte le debite operazioni
si troverà $Cc.n\varphi . d.Sc.m\varphi = \frac{amd\varphi}{4}\left(e^{\frac{(m+n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{-(m+n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{(m-n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{-(m-n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}\right)$
egli è manifesto che questa formola trovata è integrabile. In fatto passando all'attuale integrazione sarà $\int Cc.n\varphi\, d.Sc.m\varphi$

$$= \frac{am}{4}\left(a\left(\frac{e^{\frac{(m+n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}-e^{\frac{-(m+n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2(m+n)\sqrt{-1}}\right)+a\left(\frac{e^{\frac{(m-n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}-e^{\frac{-(m-n)\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2(m-n)\sqrt{-1}}\right)\right).$$

e in fine fatte le sostituzioni in vece della formola stessa trovata in tal modo si ha

$$\int Cc.n\varphi\, d.Sc.m\varphi = \frac{ma}{2(m+n)} . Sc.(m+n)\varphi + \frac{ma}{2(m-n)} Sc.(m-n)\varphi$$ che ec.

Scolio.

Mi confesso sinceramente debitore al P. Jacquier di questa mia soluzione comunque ella siasi. In fatti vedendo che nella equazione $d.Sc.m\varphi = \frac{md\varphi . Cc.m\varphi}{a}$ il differenziale $md\varphi\, Cc.m\varphi$ ha molta analogia colle differenze delle quantità esponenziali, mi venne sospetto, che per questa strada si potrebbe tentare qualche soluzione non infelice. Per verità appena avea la differenza delle formole esponenziali mi sono avveduto che
$d.Sc.m\varphi = \frac{md\varphi . a}{a}\left(\frac{e^{\frac{m\varphi\sqrt{-1}}{a}}+e^{\frac{-m\varphi\sqrt{-1}}{a}}}{2}\right) = \frac{md\varphi}{a} . Cc.m\varphi$.
Onde mi sono dato a credere, che la mia formola contenesse la vera origine del differenziale usato dal P. Jacquier. Quindi mi sono ritrovato nella soluzione senza una minima difficoltà. Ho fatto questa avvertenza, in desiderio di sentire il giudizio del chiarissimo Autore del problema,

ma

faccio

CB somministrano l'analogia AC : [illegible] : [illegible] CE
$d\,\text{Sc.}u : du\ \text{Sc.}u : a$

da cui deducesi l'equazione $d\,\text{Sc.}u = -\frac{du\,\text{Sc.}u}{a}$.

Stando inoltre AD : CD [illegible] BC
$d\,\text{Sc.}u : du$ [illegible] a.

ne risulta $d\,\text{Sc.}u$ [illegible] che è la formola della [illegible]

quantità infinitesime [illegible]

Problema

Ritrovar l'integrale della formola $Cc.\varphi . d\,Sc.\frac{m}{n}\varphi$ o almeno determinar la quadratura a cui appartiene; posto che $m : n$ sia ragione [illegible]

Per facilitare [illegible], pongo $\frac{m}{n} = h$ [illegible] D. Vincenzo Riccati mio fratello alla pag. 222 delle sue Instituzioni Analitiche essere

$$Sc.h\varphi = \frac{\overline{Cc\,\varphi + \sqrt{-1}.Sc\,\varphi}^{\,h} - \overline{Cc\,\varphi - \sqrt{-1}.Sc\,\varphi}^{\,h}}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}} \quad (1)$$

nella qual formola v significa il raggio o sia seno tutto. Ponendo $Sc.\varphi = y$, ne risulta $Cc\,\varphi = \sqrt{v^2-y^2}$, onde si avrà

$$Sc.h\varphi = \frac{\overline{\sqrt{v^2-y^2} + y\sqrt{-1}}^{\,h} - \overline{\sqrt{v^2-y^2} - y\sqrt{-1}}^{\,h}}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}} \quad (2).$$

Presa dunque la differenza avremo

$$d\,Sc\,h\varphi = \frac{h\,\overline{\sqrt{v^2-y^2}+y\sqrt{-1}}^{\,h-1}.\left(-\frac{y\,dy}{\sqrt{v^2-y^2}} + dy\sqrt{-1}\right)}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{h.\overline{\sqrt{v^2-y^2}-y\sqrt{-1}}^{\,h-1}.\left(-\frac{y\,dy}{\sqrt{v^2-y^2}} - dy\sqrt{-1}\right)}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}}$$

e moltiplicando per $Cc\,\varphi = \sqrt{v^2-y^2}$

$$Cc.\varphi . d\,Sc\,h\varphi = \frac{h\,\overline{\sqrt{v^2-y^2}+y\sqrt{-1}}^{\,h-1}.\left(-y\,dy + dy\sqrt{-1}\sqrt{v^2-y^2}\right)}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{h.\overline{\sqrt{v^2-y^2}-y\sqrt{-1}}^{\,h-1}.\left(-y\,dy - dy\sqrt{-1}\sqrt{v^2-y^2}\right)}{2v^{h-1}.\sqrt{-1}};$$

e giacchè $\frac{-y}{\sqrt{-1}} = y\sqrt{-1}$ avremo $\frac{-y\,dy + dy\sqrt{-1}\sqrt{v^2-y^2}}{\sqrt{-1}} = \overline{\sqrt{v^2-y^2}+y\sqrt{-1}}.dy$, $\frac{-y\,dy - dy\sqrt{-1}\sqrt{v^2-y^2}}{\sqrt{-1}} = \overline{\sqrt{v^2-y^2}-y\sqrt{-1}}.-dy$

e per conseguenza ridotti i computi

$$Cc.\varphi . d\,Sc.h\varphi = \frac{h.\overline{\sqrt{v^2-y^2}+y\sqrt{-1}}^{\,h}.dy}{2v^{h-1}} + \frac{h.\overline{\sqrt{v^2-y^2}-y\sqrt{-1}}^{\,h}.dy}{2v^{h-1}} \quad (3.)$$

Faccio

quantità introducendo [illegible]

moltiplicato in $\frac{hv}{2\cdot\overline{h-1}}$

[illegible] di comparazione [illegible]

secondo [illegible] moltiplicato in $\frac{hv}{2\cdot\overline{h+1}}$ rimane

$\int Cc.\varphi \cdot d\,Sc.h\varphi = \frac{hv}{2\cdot\overline{h-1}} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi + \frac{hv}{2\cdot\overline{h+1}} \cdot Sc.\overline{h+1}.\varphi \quad (6)$

Acciocchè $Sc.\overline{h-1}.\varphi$, $Sc.\overline{h+1}.\varphi$ si conoscano anche essi algebraicamente, egli è evidente che h sia quantità intera e quindi in tal circostanza il valore della nostra sommatoria sarà sempre algebrico, eccettuati i due casi di $h = \pm 1$, che conducono alla quadratura del circolo, ai quali può servire la formola ritrovata, in cui il primo, o il secondo termine dell'omogeneo di comparazione compare sotto l'aspetto di $\frac{0}{0}$, purchè se ne determini il valore.

Sia in primo luogo $h-1 = k$ quantità infinitesima, e scriveremo $\frac{hv}{2\cdot\overline{h-1}} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi = \frac{v}{2k} \cdot Sc.k\varphi$: ma $Sc.k\varphi = k\varphi$; dunque $\frac{hv}{2\cdot\overline{h-1}} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi = \frac{v\varphi}{2}$, qualunque sia il valore minimo di k, e in conseguenza anche nullo. Quindi nel presente incontro $\frac{0}{0} = \frac{v\varphi}{2}$. Il secondo termine dell'omogeneo di comparazione nella formola (6), posto $h=1$, si eguaglia ad $\frac{v}{4} \cdot Sc.2\varphi = \frac{Cc.\varphi \cdot Sc.\varphi}{2}$, e perciò $\int Cc.\varphi \cdot d\,Sc.\varphi = \frac{v\varphi + Cc.\varphi \cdot Sc.\varphi}{2}$.

Che se $h+1 = k$ quantità infinitesima troveremo il secondo termine del mentovato omogeneo di comparazione $= \frac{-v\varphi}{2}$, e il primo $= \frac{v}{4}\,Sc.-2\varphi = \frac{-v}{4}\,Sc.2\varphi = -\frac{Cc\varphi . Sc\varphi}{2}$; e per conseguenza $\int Cc.\varphi \cdot d\,Sc.-\varphi = \frac{-v\varphi - Cc\varphi . Sc\varphi}{2}$.

Stabilito un dato valore di h, riesce agevole l'esprimere $\int Cc.\varphi \cdot d\,Sc.h\varphi$ o per $Sc.\varphi = y$, o per $Cc\,\varphi = \sqrt{v^2-y^2} = x$. Rischiaro con due esempj la mia asserzione.

Esempio I.

Sia $h = 2$ e modificando la formola (4) giusto il solito, avremo $\int Cc.\varphi \cdot d\,Sc.2\varphi = vy + \frac{1}{6v\sqrt{-1}} \cdot \overline{\sqrt{v^2-y^2} - y\sqrt{-1}}^{\,3} - \left(\sqrt{v^2-y^2} - y\sqrt{-1}\right)^3$:

ma

quantità infinitesima, avremo ed essendo necessariamente

§ 13

$\overline{\frac{1}{2}\varphi}^2 = \frac{v\sqrt{x^2+y^2} \pm vx}{2} = \frac{v^2-vx}{2}$, e perciò $Sc.\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{v^2-vx}{2}}$.

Ora essendo $-Sc.\frac{1}{2}\varphi = Sc.-\frac{1}{2}\varphi$ si cava ... ancora
$Sc.-\frac{1}{2}\varphi = -\sqrt{\frac{v^2-vx}{2}}$.

Dato ... $Sc.\frac{3}{2}\varphi = x+y\sqrt{-1}$ ... $)^{\frac{3}{2}}$

... $2v\frac{1}{2}\sqrt{-1}$

... il tutto al quadrato, onde ne risulta

$\overline{Sc.\frac{3}{2}\varphi}^2 = \frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^3 + \overline{x+y\sqrt{-1}}^{\frac{3}{2}} \cdot -2(x-y\sqrt{-1})^{\frac{3}{2}} + \overline{x-y\sqrt{-1}}^3}{-4v}$ ... le

le necessarie operazioni, che mostrano

$\overline{x+y\sqrt{-1}}^{\frac{3}{2}} \cdot -2\overline{(x-y\sqrt{-1})}^{\frac{3}{2}} = 4v^3$, scopriremo

$\overline{Sc.\frac{3}{2}\varphi}^2 = \frac{v^3+3v^2x-4x^3}{2v} - \frac{v^4+4vx^3+4x^4}{v^2} \cdot \frac{v^2-vx}{2}$ ...

conseguenza $Sc.\frac{3}{2}\varphi = \frac{v+2x}{v}\sqrt{\frac{v^2-vx}{2}}$. Avremo ...

$Sc.\varphi$ ... $Sc.h\varphi$ ... $+\frac{v}{3}Sc.\frac{3}{2}\varphi$ ... $\frac{v}{2}\sqrt{v^2-vx}+\frac{v}{3}\cdot\frac{v+2x}{v}\frac{\ }{2}$

$= \frac{v}{2}+\frac{v}{6}+\frac{2x}{6}\sqrt{\frac{v^2-vx}{2}} - \frac{2v+x}{3}\sqrt{\frac{v^2-vx}{2}}$, il che ...

Aggiungo la soluzione di ... che ... analogia col ...

Problema II.

Ritrovare l'integrale ...

$Cc.h\varphi\, d Sc.\varphi$ ... $Cc.h\varphi . dSc.\varphi$ hanno

le due, ... $Cc.\varphi$ ... che si ritrovano nella ... di

la proprietà, che si ... $Cc.\varphi . dSc.h\varphi : Cc.h\varphi . dSc\varphi :: \frac{dSc.h\varphi}{Cc.h\varphi} : \frac{dSc\varphi}{Cc.\varphi}$

$h : 1$. In fatti

ma queste due ultime quantità stanno, come $hd\varphi : d\varphi$, cioè a

dire come $h:1$; dunque $Cc.\varphi\, dSc.h\varphi : Cc.h\varphi . dSc\varphi$

$:: h:1$ e perciò $\frac{1}{h} \cdot Cc.\varphi . dSc.h\varphi = Cc.h\varphi . dSc\varphi$, e

integrando $\int Cc.h\varphi . dSc\varphi = \frac{1}{h} \cdot \int Cc.\varphi . dSc h\varphi$. Avremo

dunque pel Problema I. $\int Cc.h\varphi\, dSc.\varphi = \frac{v}{2.\overline{h-1}} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi$

$+ \frac{v}{2.\overline{h+1}} \cdot Sc.\overline{h+1}.\varphi$.

A cagione della nostra elegante proprietà ho posta

la soluzione del Problema II, quantunque esso non sia

salvo che

quantità infinitesima, [illegible] ed [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] di [illegible] [illegible] [illegible]; dunque

[illegible] $= \frac{[illegible]}{2.h-1}$ Sc. [illegible] $\frac{[illegible]}{2.h+1}$.

[illegible] somma [illegible] quantità [illegible] [illegible] [illegible], che [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] e il [illegible] [illegible] $= Cc.h\varphi \cdot d\,Sc\,\varphi$, come di sopra ho dimostrato per altra via.

Non lascio di avvertire, che si renderebbe più corta la soluzione del Problema I. provando prima $Cc.\varphi \cdot d\,Sc\,h\varphi = h : Cc\,h\varphi \cdot d\,Sc.\varphi$, e poscia dando al calcolo della formola (3).

Problema IV.

Ritrovare l'integrale della formola

$$Sc\,\varphi \cdot d\,Cc\,h\varphi.$$

Facendo $h\varphi = p$, si determina $\varphi = \frac{p}{h}$, e quindi $Sc\,\varphi \cdot d\,Cc.h\varphi = Sc.\frac{p}{h} \cdot d\,Cc.p$. Ora pel Problema III.

$$\int Sc.\tfrac{1}{h}.p \cdot d\,Cc.p = Cc.p \cdot Sc\tfrac{p}{h} - \frac{v}{2.1-h} \cdot Sc.\frac{1-h}{h}.p - \frac{v}{2.1+h}\,Sc.\frac{1+h}{h}.p$$

$$= Cc.h\varphi \cdot Sc.\varphi - \frac{v}{2.1-h} \cdot Sc\;\overline{1-h}.\varphi - \frac{v}{2.1+h} \cdot Sc.\overline{1+h}.\varphi = Cc.h\varphi \cdot Sc.\varphi$$

$$- \frac{v}{2.h-1} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi - \frac{v}{2.h+1} \cdot Sc.\overline{h+1}.\varphi$$; dunque $Sc.\varphi \cdot d\,Cc.h\varphi =$

$$Cc.h\varphi \cdot Sc.\varphi - \frac{v}{2.h-1} \cdot Sc.\overline{h-1}.\varphi - \frac{v}{2.h+1} \cdot Sc.\overline{h+1}.\varphi.$$

Problema V.

Ritrovare l'integrale della formola

$$Sc.h\varphi \cdot d\,Sc.\varphi.$$

In questo incontro avvenne per le cose dette nel Problema I

$$Sc.h\varphi\; d\,Sc\,\varphi = \frac{\overline{Cc.\varphi + \sqrt{-1} \cdot Sc.\varphi}^{\,h}\; [illegible] - \overline{Cc.\varphi - \sqrt{-1} \cdot Sc.\varphi}^{\,h}\; [illegible] \cdot d\,Sc.\varphi}{2v^{h-1} \cdot \sqrt{-1}}$$

quantità infinitesima, allora ed essendo insignificante $Sc.\,kq = kq$; ovvero $Cc.\,kq = \sqrt{v^2 - k^2q^2} = v - \frac{k^2q^2}{2v}$, e perciò $\frac{v}{2.\overline{k-1}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{k-1}.q} = \frac{v}{2k} \cdot \frac{k^2q^2}{2v} = \frac{kq^2}{4}$, e quando finalmente k svanisca, ed $k-1=0$, $\frac{v}{2.\overline{k-1}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{k-1}.q}$ $= \frac{0}{0} = 0$.

Mettendo $k=2$, avremo $\int Sc.\,q.\,d\,Sc\,q^2 = \frac{-v}{4} \cdot \overline{v - Cc - 2q} + \frac{0}{0}$. e giacchè $Cc.-2q = Cc.\,2q$ ed anche qui come sopra si trova $\frac{0}{0} = 0$, $\int Sc.-q\,d\,Sc\,q$ $= -\overline{Sc.\,q}^2$.

Problema VI

Ritrovare l'integrale della formola

$$Sc.\,q.\,d\,Sc.\,kq.$$

Pongo $kq = p$, e scrivo $Sc.\,q.\,d\,Sc\,kq = Sc\,\frac{1}{k}.p.\,d\,Sc.p.$ ed integrandone il precedente Problema V. avremo

$$\int Sc.\tfrac{1}{k}p.\,d\,Sc\,p = \frac{v}{2.\overline{\frac{1}{k}-1}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{\tfrac{1}{k}-1}.p} + \frac{v}{2.\overline{\frac{1}{k}+1}} \cdot \overline{v - Cc\,\overline{\tfrac{1}{k}+1}\,p},$$

fatti i dovuti calcoli e sostituito in cambio di $\frac{p}{k}$ il suo valore q (ci si presenterà)

$$\int Sc\,q.\,d\,Sc\,kq = \frac{kv}{2.\overline{1-k}} \cdot \overline{v - Cc\,\overline{1-k}.q} + \frac{kv}{2.\overline{1+k}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{1+k}\,q}$$

$$= \frac{-kv}{2.\overline{k-1}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{k-1}.q} + \frac{kv}{2.\overline{k+1}} \cdot \overline{v - Cc.\overline{k+1}\ldots}$$

Problema VII

Ritrovare l'integrale della formola

$$Cc.\,kq.\,d\,Cc.\,q$$

essendo $Cc.\,kq = \frac{\overline{Cc.q + \sqrt{-1}\,Sc.q}^k + \overline{Cc.q - \sqrt{-1}\,Sc.q}^k}{2v^{k-1}}$ avremo

$$Cc.\,kq\,d\,Cc.q = \frac{\overline{Cc\,q + \sqrt{-1}\,Sc\,q}^k.\,d\,Cc.q + \overline{Cc.q - \sqrt{-1}\,Sc.q}^k.\,d\,Cc.q}{2v^{k-1}} =$$

$$\frac{\overline{x + \sqrt{-1}\sqrt{v^2-x^2}}^k.\,dx + \overline{x - \sqrt{-1}\sqrt{v^2-x^2}}^k.\,dx}{2v^{k-1}}.$$ Pongo $x + \sqrt{-1}\sqrt{v^2-x^2} = z$

e ne

$\frac{v}{4}\cdot\overline{-v+cc\,2\varphi}$, e poiché $cc\,2\varphi = v - 2\,\frac{sc\,\varphi^2}{v}$ avremo

finalmente $\int cc\,\varphi\cdot d\,cc\,\varphi = -\frac{sc\,\varphi^2}{2} = \frac{cc\,\varphi^2}{2} - v^2$.

Se $h=-1$ troveremo collo stesso metodo $\frac{0}{0}=0$,

e quindi $\int cc\,-\varphi\; d\,cc\,\varphi \quad \int cc\,.\; d\,cc\,\varphi = -\frac{sc\,\varphi^2}{2} = \frac{cc\,\varphi^2 - v^2}{2}$

Problema VIII.

Ritrovare l'integrale della quantità

$cc\,\varphi\cdot d\,cc\,h\varphi$

Comprenderemo il medesimo facendo $h\varphi = p$, e scoprirò

$cc\,\varphi\cdot d\,cc\,h\varphi = cc\,\frac{1}{h}\,p\cdot d\,cc\,p$, e per l'antecedente Problema avremo $\int cc\,\varphi\cdot d\,cc\,h\varphi = \frac{v}{2\cdot\overline{\frac{1}{h}+1}}\cdot\overline{-v+cc\,\overline{\frac{1}{h}+1}\cdot p} + \frac{v}{2\,\overline{\frac{1}{h}-1}}\cdot\overline{v-cc\,\overline{\frac{1}{h}-1}\cdot p}$

$\frac{hv}{2\cdot\overline{1+h}}\cdot\overline{-v+cc\cdot\overline{1+h}\cdot\varphi} + \frac{hv}{2\cdot\overline{1-h}}\cdot\overline{v-cc\cdot\overline{1-h}\cdot\varphi} = \frac{hv}{2\,\overline{h+1}}\cdot\overline{-v+cc\cdot\overline{h+1}\,\varphi}$

$+\frac{hv}{2\,\overline{h-1}}\cdot\overline{-v+cc\cdot\overline{h-1}\cdot\varphi}$

Uso

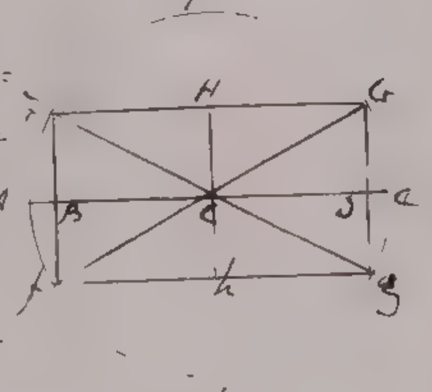
del metodo delle derivazioni nella soluzione di ogni Problema.

Trovare col metodo delle variazioni il poligono, che tra quelli, che sono formati di un pari numero ~~[illegible]~~ di lati ~~[illegible]~~ eguali, contiene la massima superficie.

Sia y un'ordinata qualunque del poligono, ed x l'assissa corrispondente, onde si abbia l'elemento dell'aja $= (y + \frac{1}{2}dy)\,dx$, e per conseguenza l'aja intiera $= \int (y+\frac{1}{2}dy)\,dx$. Seguendo dunque il metodo delle variazioni dovrà essere $\delta \int (y+\frac{1}{2}dy)\,dx =$
$\int (\delta y dx + \frac{1}{2}\delta dy dx + (y+\frac{1}{2}dy)\,\delta dx) = 0$.
Ora ciascun lato del poligono è in generale $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; dunque si avrà $\delta\sqrt{(dx^2+dy^2)}$
$= \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 0$, a cagione che i lati del poligono sono dati; e per conseguenza $dx\,\delta dx + dy\,\delta dy = 0$, e quindi $\delta dx = -\frac{dy\,\delta dy}{dx}$.
Sostituendo questo valore nell'equazione precedente, diverrà $\int (dx\delta y + (\frac{1}{2}dx - \frac{ydy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\,\delta dy) = 0$. Si metta in luogo di δdy il suo valore $d\delta y$, e fatto $\frac{1}{2}dx - \frac{ydy}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx} = z$, ci si presenterà $\int (dx\delta y + z d\delta y) = 0$ (*). Ora è d'uopo integrare per parti il termine $zd\delta y$ affine di far isvanire la differenza δy: Perciò io noto, che $dz\delta y = dz\delta y + zd\delta y + dzd\delta y =$
$zd\delta y + dz(\delta y + d\delta y)$ ed esprimendo per $\delta y'$ il termine, che segue δy, mi si presenta
$d.z\delta y =$ ~~[illegible]~~ $zd\delta y + dz\delta y'$, e quindi
$z\delta y - \int zd\delta y + \int dz\delta y'$, o sia $\int zd\delta y =$
$z\delta y - \int dz\delta y'$. Il termine, che precede dz sia $d'z$, a cui corrisponde δy, ed ~~[illegible]~~ si scopre essere $\int dz.\delta y' = \int d'z.\delta y$. Avremo pertanto $\int zd\delta y = z\delta y - \int d'z\delta y$, valore, che sostituito nella formola (*) ci dà
$z\delta y + \int (dx - d'z)\,\delta y = 0$.

Supponiamo

il di cui integrale $ax - ky + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}k^2$ o sia $2ax - x^2 = k^2 + 2ky + y^2$, equazione al circolo. Posta l'ordinata $y = 0$, si troverà $a - x = \pm\sqrt{a^2 - k^2}$ e conseguentemente $x = \begin{cases} a + \sqrt{(a^2-k^2)} \\ a - \sqrt{(a^2-k^2)} \end{cases}$ La differenza $2\sqrt{(a^2-k^2)}$ di questi due valori si eguaglia alla base del poligono, che si suppone data ed $= 2b$: Avremo pertanto $\sqrt{(a^2-k^2)} = b$, e quindi $\sqrt{(a^2-b^2)} = \pm k$, formola che c'insegna il doppio valore, che può convenire al coefficiente k, acciocchè la base del poligono pareggi $2b$. Descritto il circolo col raggio $AC = a$, sia $CB = b$, il coefficiente k dovrà uguagliarsi o all'ordinata positiva $B\gamma$, o alla negativa Bf, acciocchè la base del poligono pareggi la linea data γG, ovvero fg pareggi il poligono $\gamma\eta G$, $2b$. Nei detti due incontri il poligono $A\gamma\eta Gag$ conterrà la massima superficie, quando sia inscritto al circolo.



~~a ... ~~.

Se si voglia, che i lati ~~minimi~~ del poligono non siano ~~eguali~~ dati ciascun in particolare, ma sia solamente data la loro somma, si farà semplicemente ~~uguale a zero~~ la differenza dello integrale $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, il che darà l'equazione $\delta\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int\frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 0$, la quale dovrà congiuntamente aver luogo colla equazione del massimo $\int(dx\,\delta y + \frac{1}{2}dx\,\delta dy + (y + \frac{1}{2}dy)\,\delta dx$. Moltiplicando dunque una di queste equazioni pel coefficiente indeterminato k, ed unendole insieme si avrà in generale

Trovare col metodo delle Variazioni la curva, che tra le isoperimetre genera il massimo solido, quando si gira intorno al suo asse, ed è fornita essa di una superficie data.

Si cerca la curva HDG, che, tra le isoperimetre generi il massimo solido, quando si gira intorno all'asse AC. Sia AB = x, BD = y, e per l'antecedente Problema sarà la circonferenza del raggio y $= \frac{cy}{a}$, e l'aja circolare $= \frac{cy^2}{2a}$. Moltiplicando questa per dx, ne risulta il solido $= \frac{cy^2 dx}{2a}$ prodotto dal rettangoletto B7, che si gira intorno all'asse AC. La linealetta 7e = dy rivolgendosi intorno all'asse predetto produce la zona circolare $=\frac{c}{a}(ydy + \frac{dy^2}{2})$, che moltiplicata per $\frac{1}{2}dx$ dà il solido $= \frac{c}{a}(\frac{ydy}{2} + \frac{dy^2}{4})dx$ generato dalla rivoluzione del triangoletto D7e $= \frac{dxdy}{2}$ intorno ad AC. Per la qual cosa il solido generato dal rivolgimento del trapezio BDeC intorno all'asse AC si agguaglierà a $\frac{cy^2dx}{2a} + \frac{cydydx}{2a} + \frac{cdy^2dx}{4a}$ ed il solido intero prodotto dal giro della curva HL $= \int \frac{cy^2dx}{2a} + \frac{cydydx}{2a} + \frac{cdy^2dx}{4a}$

Secondo il metodo delle Variazioni dovrà essere $\delta \int \frac{cy^2dx}{2a} + \frac{cydydx}{2a} + \frac{cdy^2dx}{4a} = 0$

effettuata la differenziazione, troveremo

$\frac{c}{a}\int(y^2\delta dx + 2y\delta y dx + dy^2 dx + dy\delta y dx\ 2y\delta y\, \delta dx + \delta y^2 \delta dx + dy\, dy\, dx$

$+ y\delta dy dx + dy\delta dy\, dx + dy\, dy\, \delta dx$

$+ y\delta dy\, \delta dx + dy\delta dy\, \delta dx + ydy\, \delta dx$

$+ \frac{dy^2 \delta dx}{2} + dy\delta dy\, \delta dx + (\frac{\delta dy}{2})^2 \delta dx$

$+ dy\delta dy\, dx + (\frac{\delta dy^2}{2} dx)) = 0$, formola

che si riduce alla seguente, trascurati

che surrogato nella formola * determina, lasciate le quantità relativamente nulle $2\delta y + \int (y\,dx - d'z)\,\delta y = 0 \cdot 2\delta y + \int$

Supponiamo, che la curva tagli l'asse in due punti, onde la prima, e l'ultima ordinata y, e parimente le loro differenze δy siano nulle. Svanirà il termine $2\delta y$, ch'è fuori del segno $\int$, ed avrassi semplicemente $\int (y\,dx - d'z)\,\delta y = 0$, il che generalmente determina, $y\,dx - d'z$

Trovare col metodo delle Variazioni la curva, che fra quelle, che sono isoperimetre, contiene la massima superficie.

Sia y un' ordinata qualunque della curva ed x l'assissa corrispondente, onde si abbia l'elemento dello aja $=(y+\frac{1}{2}dy).dx$, e per conseguenza l'aja intiera $=\int(y+\frac{1}{2}dy).dx$. Seguendo dunque il metodo delle Variazioni dovrà essere $\delta\int(y+\frac{1}{2}dy).dx =$ $\int(\delta y\,dx+\frac{1}{2}\delta dy\,dx+(y+\frac{1}{2}dy)\,\delta dx)=0$. Ora l'elemento della curva è $=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, e quindi $\delta\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx\,\delta dx+dy\,\delta dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=0$ a cagione che le curve sono isoperimetre, e per conseguenza contengono un egual numero infinito di elementi minimi eguali $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Avremo pertanto $\delta dx=-\frac{dy\,\delta dy}{dx}$, valore, che sostituito nell'equazion precedente, la fa divenire $\int(dx\,\delta y+(\frac{1}{2}dx-\frac{y\,dy}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx})\,\delta dy)$ $=0$. Si metta in luogo di δdy il suo valore $d\delta y$, e fatto $\frac{1}{2}dx-\frac{y\,dy}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}=z$, ci si presenterà $\int(dx\,\delta y+z\,d\delta y)=0$ (*). Quì è di uopo integrare per parti il termine $z\,d\delta y$, affine di far svanire la differenza δy. Perciò io noto, che $d.z\,\delta y=dz\,\delta y+z\,d\delta y$ $+dz\,d\delta y=z\,d\delta y+dz(\delta y+d\delta y)$, ed esprimendo per $\delta y'=\delta y+d\delta y$ il termine, che segue δy, mi si presenta $d.z\,\delta y=z\,d\delta y$ $+dz\,\delta y'$, e quindi $z\,\delta y=\int z\,d\delta y+\int dz\,\delta y'$, o sia $\int z\,d\delta y=z\,\delta y-\int dz\,\delta y'$. Il termine, che precede dz sia $d'z$, a cui corrisponde δy, ed egualmente si scopre essere $\int dz\,\delta y'=\int d'z\,\delta y$. Avremo pertanto $\int z\,d\delta y$ $=z\,\delta y-\int d'z\,\delta y$, valore, che sostituito nella formola (*) ci dà $z\,\delta y+\int(dx-d'z)\,\delta y=0$

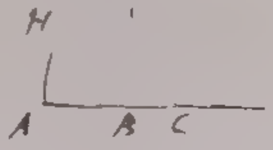
supponiamo

minore di $\frac{4ab}{c}$, il perimetro b della curva dovrà accomodarsi ad una porzione di cerchio maggior della sua metà, acciocchè rinchiuda la massima superficie. Supposta $n < 2$, sia relativamente al diametro $2a$ la detta porzione $= \frac{c}{n}$, e ad essa corrisponda la corda $= 2g$. Facciasi $\frac{c}{n} : 2g :: b : \frac{2ngb}{c}$, e poichè $2g < 2a$, essendo il diametro la massima corda nel circolo, ed $n < 2$, ne risulta $\frac{2ngb}{c} < \frac{4ab}{c}$. Si faccia inoltre $\frac{c}{n} : 2a :: b : \frac{2nab}{c}$, ed il quarto termine s'eguaglierà al diametro di quel circolo, alla cui porzione maggiore del semicircolo dee adattarsi il perimetro dato b, onde la massima superficie comprenda, mentre i suoi punti estremi distano per $\frac{2ngb}{c}$. Per cagione d'esempio sia $n = \frac{6}{5}$, sarà $\frac{c}{n} = \frac{5c}{6}$, e b dovrà essere $= \frac{5}{6}$ della circonferenza il cui diametro $= \frac{2nab}{c} = \frac{12}{5}\frac{ab}{c}$, e la corda dell'arco b s'eguaglierà a $\frac{2ngb}{c} = \frac{6}{5}\frac{ab}{c}$, cioè a dire al raggio del circolo, essendo in tal circostanza $2g = a$.

Divenga nulla la lontananza de' due punti estremi della curva, ed in questa ipotesi il perimetro b dovrà ripiegarsi in un intero circolo, il cui diametro $\frac{2nab}{c} = \frac{2ab}{c}$, stantechè $n = 1$. Pareggia esso la metà di quello allorquando i punti estremi della curva distano pel diametro $\frac{4ab}{c}$ del semi-

circolo

Trovare col metodo delle Variazioni la curva, che fra le isoperimetre genera la massima superficie, quando si gira intorno al suo asse.



Si cerca la curva H D C, che fra le isoperimetre genera la massima superficie, quando si gira intorno all'asse A C. Sia $AB = x$, $BD = y$, e posto che si eguagli a c la circonferenza circolare del raggio $= a$, sarà la circonferenza del circolo, il cui raggio $BD = y$, uguale a $\frac{cy}{a}$. Essendo l'elemento della curva $De = \sqrt{dx^2+dy^2}$, ne risulta l'elemento della superficie generata $= \frac{cy}{a}\sqrt{dx^2+dy^2}$, e per conseguenza la superficie intera $= \int \frac{cy}{a}\sqrt{dx^2+dy^2}$. ~~Secondo il metodo delle Variazioni dovrà essere $\delta \int \frac{cy}{a}\sqrt{dx^2+dy^2}$ [illegible]~~

~~$\int \frac{c\delta y}{a}\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{cy}{a}\frac{(dx\,\delta dx + dy\,\delta dy)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ [illegible]~~

La curve isoperimetre contengono un pari numero di elementi eguali, e perciò $\sqrt{dx^2+dy^2}$ può considerarsi in qualità di costante; ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Sarà dunque $\frac{c}{a}\sqrt{dx^2+dy^2}$ quantità costante, e quindi gli elementi della superficie proporzionali ad y, e pel metodo degli infinitesimi la superficie totale proporzionale all'aja ~~[illegible]~~ della curva, la cui ascissa $= \int\sqrt{dx^2+dy^2}$ e la ordinata $= y$.

Per

un angolo acuto somministrerebbe la massima superficie qualora venisse prescritta la condizione, che il luogo dovesse passare per un dato punto.

Nel punto A sia l'ordinata $y = AH = g$. Si prolunghi AH sino in G, facendo $HG = b$, e la retta HG girando intorno il punto A produrrà la massima superficie.

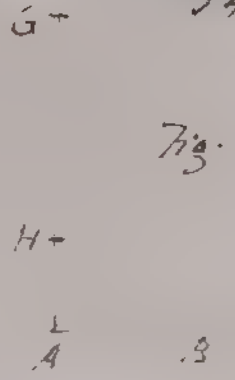


Fig. 2

Se la retta HG (fig. 3) formasse con HC parallela ad AB un angolo acuto, rivolgendosi intorno ad AB genererebbe una superficie minore di quella prodotta dalla linea HG (fig. 2.); il che si dimostra collo stesso metodo poco fa da me usato. La nostra superficie sarebbe relativamente massima, posta la condizione, che la linea $HG = b$ dovesse passare pel dato punto D.

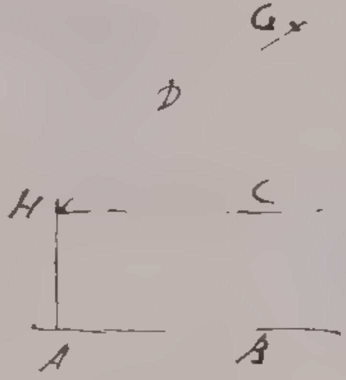


Fig. 3

Osservazioni
sopra l'Equazioni lineari di Limite
del Sig.r P. Nicolai.

Intorno alla soluzione del Caso irreducibile avverto, che dedotta dall'equazione (14.) $u^3 - pu \pm q = 0$ l'equazione (16.) $t^6 \pm qt^3 + \frac{p^3}{27} = 0$ mediante la sostituzione (15.) $u = t + \frac{p}{3t}$, e supponendo $x = t^3$, $\pm 3f = \pm q$, $3g = \frac{p^3}{27}$, si perviene alla formola (1.) $x^2 \pm 3fx + 3g = 0$, di cui non è radice la formola (12.) da me dimostrata $= 0$, appartenendo essa radice all'equazione (4.) $x^3 \pm 3fx^2 + 3gx = 0$.

Dopo le premesse dimostrazioni chiaramente si vede, che all'Autore Anonimo non è riuscito nè di trovare l'espressioni reali delle Radici dell'Equazioni Quadratiche, nelle quali il primo, ed ultimo termine sono positivi; ed il quadrato della metà del coefficiente è minore dell'omogeneo di comparazione, nè di dedurne per Corollario la soluzione del Caso irreducibile …

Esame dell'Autore sopra la propria Soluzione del mentovato Problema.

Non est mortale quod optas.

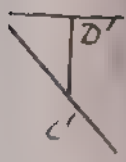
Se si adopra qualche attenzione, facilmente si scorge, che la seguente Equazione non differisca da un'Equazione identica (C)

$$\mp f^3 \pm \frac{3fg}{2} \pm g\sqrt{g - \frac{3}{4}f^2} = \left|\begin{array}{l} \pm \frac{f^3}{8} \pm \frac{3f^2}{4}\sqrt{g-\frac{3}{4}f^2} \\ \pm \frac{3f}{2}\cdot\left(g - \frac{3}{4}f^2\right) \\ \pm \left(g-\frac{3}{4}f^2\right)\cdot\sqrt{g-\frac{3}{4}f^2} \end{array}\right.$$

Ma la seconda parte di quest'Equazione, come dimostra il calcolo, è uguale a $\left(\pm\frac{f}{2} \pm \sqrt{g - \frac{3}{4}f^2}\right)^3$; dunque estraendo dall'Equazione (C) la radice cubica, sarà $\sqrt[3]{\mp f^3 \pm \frac{3fg}{2} \pm g\sqrt{g-\frac{3}{4}f^2}} = \pm\frac{f}{2} \pm \sqrt{g - \frac{3}{4}f^2}$. Perciò per l'equazione (9.) si avrà $z = \pm\frac{f}{2} \pm \sqrt{g-\frac{3}{4}f^2}$, e $z \mp \frac{f}{2} = \pm\sqrt{g - \frac{3}{4}f^2}$, e quadrando, $z^2 \mp fz + \frac{f^2}{4} = g - \frac{3}{4}f^2$, e trasponendo ~~~~, $z^2 \mp fz = g - f^2$, e dividendo per z, $z \mp f = \frac{g - f^2}{z}$, e di nuovo trasponendo, $\frac{f^2 - g}{z} = \pm f - z$. Conseguentemente per l'equazione (7.) $y = \pm f - z$, e nell'equazione (5.) in luogo di y sostituendo $\pm f - z$, sarà $x = \mp f + z \pm f - z = 0$. E per conseguenza sarà x uguale a zero ancora nell'Equazioni (12.) e (13.), e con la Soluzione del Problema svanirà ancora la Soluzione del Caso irreducibile.

[illegible]

Ang.° Gatti S.O. Verel


D'
C'

Osservazioni sopra le equazioni lineari di limite.

Il Sig. Prof. Nicolai nella sua Opera *Nova Analyseos Elementa* impiega cinque Capitoli cominciando dal terzo sino al settimo inclusivamente, che si estendono dalla pag. 51 alla 214 a trattare delli equazioni lineari di limite. Sono queste espresse da tre formole

I. $a = x + y$; II. $a = x - y$; III. $a = y - x$, alle quali equivagliono le seguenti

IV. $a - x = y$; V. $x - a = y$; VI. $a + x = y$.

Benchè la sola costruzione della formola IV. comprenda sostanzialmente quella della V. e della VI, non mancherò di costruire anche quella.

Cominciando adunque dal costruire la formola IV. tiri (Fig. 1.) l'indefinita $D''D'$, e segnato ad arbitrio il punto A, conduca per esso la retta $C'AC''$, che formi con $D''D'$ l'angolo semiretto $D''AC''$. Taglio $AA = a$, e supposta $AD = x$, sarà $AD = y$, onde si verifichi l'equazione I. $a = x + y$. Poichè $AA = a$, $AD = x$, ne proviene $AD = a - x = y$ per la formola IV., e per conseguenza, delineata DC normale a $D''D'$, $DC = y$. Si osservi che le $AD = x$ sono positive procedendo da A verso D, negative procedendo da A verso D'', e che al contrario le $AD = DC = y$ si deggiono considerare positive da A verso D, da D verso C, ed all'opposto negative da A verso D', da D' verso C'. Segnate $AD' > AA$, $AD'' > AA$, per i punti A, D', D'', si menino le normali AC, $D'C'$, $D''C''$. Se $AD = x = AA = a$, ne risulta $y = 0$. Che se $x = AD'$, in tal caso per la formola $a - x = y$ diviene la $y = AD' = D'C'$ negativa. Posto $AD = x = 0$, abbiamo $y = AA = AC = a$, e supponendo

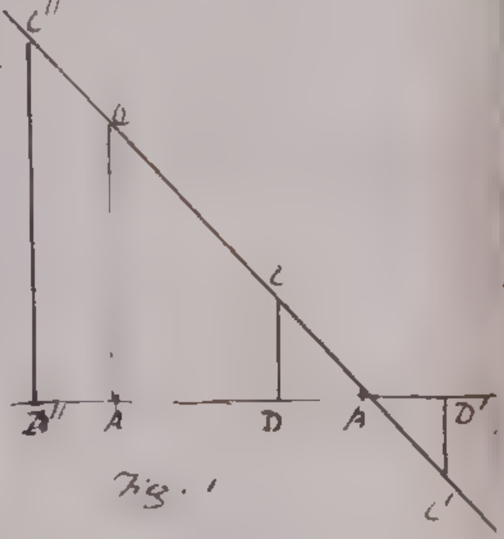


Fig. 1

$AD'' = x$

La principal mira della formola IV. si è
che (Fig. 1.) sia $AD = x < AB = a$, e perciò
$BD = y$ dee assumersi come positiva, onde si
avverà essa formola IV. $a - x = y$, dipendente
dalla I. $a = x + y$.

La formola V. $x - a = y$ principalmente (Fig. 2.)
suppone $AD' = x > AB = a$, e quindi hanno
da essere positive le y procedendo da B verso
D', onde si abbia $x - a = y$, ossia $x = a + y$

Il primario scopo della formola VI. (Fig. 3
$a + x = y$ è diretto a considerare $BD'' = y$
$> BA = a$. Le y dunque saranno positive
non meno che le x camminando da B verso
D''.

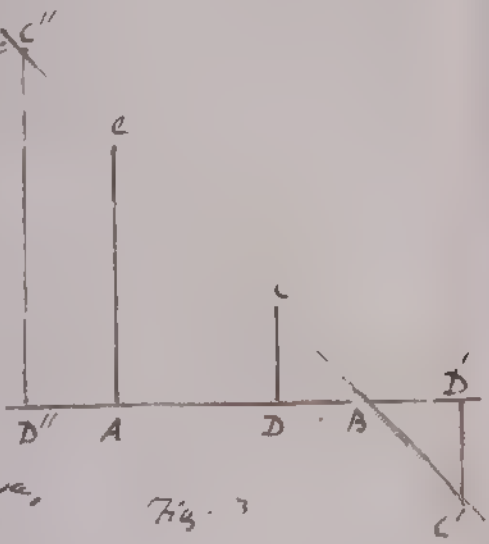


Fig. 3

Le tre costruzioni per altro soddisfanno
ancora alle ipotesi della x, e delle y negative,
e variano in quello solo, che nella Fig. 1
sono positive le x; e negative le y da A
verso D. Nella Fig. 2. le x positive hanno
la stessa direzione, e le y negative una di-
rezione contraria. Finalmente la Fig. 3
vuole, che si cangi la direzione da A, verso o da B verso
D'' delle x ~~positive~~, e delle y positive. Dipende
dalle circostanze, delle costruzioni che per le x, e le y positive
si prenda piuttosto una direzione, che la
contraria.

Si accorgerà chi legge, che quanto ho scritto
è sufficientissimo per mettere in piena luce le
equazioni lineari di Lorgna, le quali certamente
per essere trattate non abbisognavano di
cinque Capitoli, che occupano pag. 163.

Ho detto di sopra, che la costruzione della
formola IV. $a - x = y$ contiene sostanzial-
mente quelle delle formole V. ~~e della~~ $x - a = y$,
VI. $a + x = y$. E in fatti se nella V. le y

divengono

Tra le molte cose, che potrei notare nell'Opera del Sig. Prof. Nicolai, mi ristringo ad una sola. Nella formola $x^3 - px - q = 0$, fatta $x = m+n$, trova col noto metodo $m^3n^3 = \frac{p^3}{27}$, $m^3+n^3 = q$, e quindi $m^6 - qm^3 = -\frac{p^3}{27}$, $n^6 - qn^3 = \frac{p^3}{27}$, e poscia $m^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$, $n^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$, che nella supposizione di $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$ sono immaginarie. Ne deriva per conseguenza

$$x = m+n = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

Sin qui tutto rettamente: ma alla pag. 135. afferma tanto potersi essere $m^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ quanto $m^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$. La prima di queste formole è vera, e va di accordo colla già scoperta; ma la seconda è certamente falsa, perchè contraddizione alle formole $m^3n^3 = \frac{p^3}{27}$, $m^3+n^3 = q$, dalle quali ne nasce $m^6 - qm^3 = -\frac{p^3}{27}$: e difatti se $m^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$, avremo $m^3 - \frac{q}{2} = \sqrt{(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27})}$, ed alzando al quadrato, $m^6 - qm^3 + \frac{q^2}{4} = -\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, e finalmente $m^6 - qm^3 = -\frac{2q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, formola che apertamente discorda dalla $m^6 - qm^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Nella mia Dissertazione *Della Risoluzione Cardanica dell'Equazioni del terzo grado* inserita nel Tomo XXIV. del Giornale di Modena ho dimostrato, che quando $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, ci hanno necessariamente da essere nella formola risolvente le quantità immaginarie, onde abbiasi

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}.$$

Mi metto sotto degli occhi l'equazione $x^3 - 7x - 6 = 0$, la cui radice Cardanica

Aggiunge una riflessione, che mette in più chiaro lume la falsità dell'asserzione del Sig.r Professore. Dal paragone delle formole

$x^3 - px - q = 0$, $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = 0$,

la seconda delle quali nasce dal porre $x = m + n$, ne deriva $3mn = p$, e perciò $m^3 n^3 = \frac{p^3}{27}$. Ora essendo secondo il nostro Autore $m^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$, $n^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ ne risulta $m^3 n^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$; e quindi si scopre $\frac{p^3}{27} = \frac{2q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, e per conseguenza $\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}$. La proposizione dunque del Sig. Prof. non si avvera salvochè nel caso che sia $\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}$, in cui la formola $x^3 - px - q = 0$ è fornita di due radici eguali. In tutti gli altri incontri è falsa, ed assurda; perchè supponendo $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$ eguaglia la quantità reale alla immaginaria.

549

Trovare col metodo delle Variazioni la curva, per la quale un grave discenda nel minimo tempo nel vuoto.

I

Problema I. Essendo proposta una formola integrale indefinita rappresentata da $\int Z$; in cui Z dinota una funzione qualunque determinata dalle variabili x, y, e dalle loro differenze dx, dy, d^2x, d^2y &c., trovare la relazione, che queste variabili debbano avere tra loro, acciocchè la formola $\int Z$ divenga un massimo, o un minimo.

Soluzione. Giusta il metodo conosciuto dei massimi, e dei minimi, egli è d'uopo differenziare la proposta $\int Z$, riguardando le quantità x, y, dx, dy, d^2x, d^2y &c. come variabili, e facendo la formola che ne risulta $= 0$. Notando adunque per δ queste variazioni, ne risulterà l'equazione del massimo o del minimo $\delta\int Z = 0$, ovvero l'equivalente $\int \delta Z = 0$

Sia Z tale, che $\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x$ &c. $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y$ &c.

si presenterà l'equazione

$$\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \text{\&c.} + \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \text{\&c.} = 0$$

Ma si comprende agevolmente essere $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$ &c.; dunque

$$\int n\delta x + \int p d\delta x + \int q d^2\delta x + \text{\&c.} + \int N\delta y + \int P d\delta y + \int Q d^2\delta y + \text{\&c.} = 0$$

Di più si trova pel metodo delle integrazioni per parti $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\,\delta x$, $\int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\,\delta x + \int d^2q\,\delta x$, e così del resto; dunque l'equazion precedente si

Per liberarsi pertanto nelle equazioni trovate dalle differenze indeterminate dx, dy, δdx, δdy, si esaminerà, se per la natura del Problema vi abbia fra esse qualche rapporto dato, ed avendole ridotte al più piccolo numero possibile, si farà $= 0$ il coefficiente di ciascuna di quelle, che restano. Se sono assolutamente indipendenti le une dalle altre, l'equazion (B) ci somministrerà le due seguenti

$n - dp + d^2q = 0$

$N - dP + d^2Q = 0$.

Ma inoltriamoci alla soluzione del proposto Problema.

II

Cercando la curva della più celere discesa nel vuoto, si nomini x l'assissa verticale, ed y l'ordinata orizzontale, e la formola che esprime il tempo sarà $\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{x}} = \int Z$, e conseguentemente $\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{\sqrt{x}} = Z$. Differenziando per δ, posta in opera la regola ordinaria, troveremo $\delta Z = -\frac{\delta x \sqrt{dx^2+dy^2}}{2x\sqrt{x}} + \frac{dx\,\delta dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{(dx^2+dy^2)}} + \frac{dy\,\delta dy}{\sqrt{x}\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, e ponendo per brevità $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, $n = \frac{-ds}{2x\sqrt{x}} = \frac{-ds}{2x\sqrt{x}}$, $p = \frac{dx}{ds\sqrt{x}}$, $P = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}$, dovrà essere per le cose dette di sopra $\int \delta Z = \int n\,\delta x + \int p\,\delta dx + \int P\,\delta dy = 0$, e facendo uso della integrazione per parti,

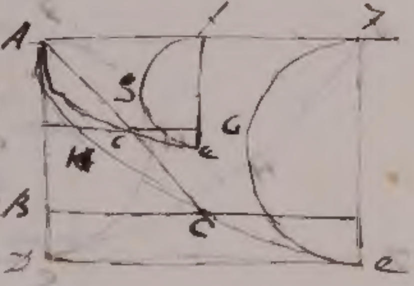
(B) $(n - dp)\,\delta x - (dP)\cdot\delta y = 0$

(C) $(p)\,\delta x + (P)\,\delta y = 0$.

III.

Primo caso. Se si tratta di trovare in generale

è chiaro, che le coordinate x, y essendo invariabili in questi punti, le loro differenze saranno nulle, ed altresì per conseguenza tutti i termini dell'equazion (C). Dovrà dunque la costante a essere determinata in guisa, che la cicloide passi pei due punti dati, il che si otterrà nel modo seguente. Siano A, C i punti dati. Con qualunque circolo generatore, il cui diametro fe = a', si descriva la cicloide Ace, che tagli la linea data AC nel punto c. Si faccia Ac : AC : Af : AD :: fe = a' : De = a, e col circolo generatore DGe si descriva la cicloide AHCe, la quale passerà pel punto C, ed è quella, per cui discendendo il grave perverrà al punto C nel minimo tempo.



Se il primo punto è dato, e la curva cercata debba esser tale, che un corpo partendo dal dato punto giunga nel minimo tempo ad un piano orizzontale dato, allora M sarà nullo in lui medesimo, e l'equazion (C) darà $M' = 0$, cioè $\frac{dx}{ds\sqrt{x}}dx + \frac{dy}{ds\sqrt{x}}dy = 0$ equazione, che dovrà aver luogo solamente nel punto dove la curva incontra il piano. Ora questo piano essendo dato di posizione, l'ascissa x, che vi corrisponde è pariment data, e per conseguenza $dx = 0$. Si averà $\frac{dy}{ds\sqrt{x}} \cdot dy = 0$, il che significa, che nel punto, in cui la curva incontra il piano esser

sarà $LK = \sqrt{ax - x^2}$, e perciò $AK = y + \sqrt{ax - x^2} = c$, essendo AK linea data. Per la natura della cicloide $AN = QG1Z$; ma $CG = QG$, $GN = \sqrt{ax - x^2}$; dunque $BC + GN = y + \sqrt{ax - x^2} = G77 = AK = c$. L'angolo dato $\angle ZG = \angle KC$ determina l'arco QG in conosciuta ragione all'arco G7Z, ch'io esprimo per $n : m$. Si faccia dunque come $m : n :: AK : KZ$, e determinato il diametro ZQ, che stia ad AZ come il diametro del circolo alla semicirconferenza, col circolo generatore QG7Z si intenda descritta la cicloide ACQ, la quale taglierà ad angolo retto l'inclinata KM, a cui il grave giungerà nel minimo tempo discendendo per la porzione di cicloide AC.

La curva AQ sia quella delle variazioni, ed essendo $CH = dx$, $HO = dy$, si avrà $PQ = \delta x$, $CP = -\delta y$: ma per la similitudine dei triangoli CHO, CPQ, $CH : HO :: CP : PQ$

$$dx : dy :: -\delta y : \delta x$$

dunque $dx\,\delta x = -dy\,\delta y$, e conseguentemente $\dfrac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{ds \cdot \sqrt{x}} = 0 = M'$

Ad una retta inclinata si sostituisca una curva RC, e questa parimente dovrà essere tagliata ad angolo retto dalla cicloide, e ne risulterà la stessa soluzione, succedendo l'incontro nel punto C, come se condotta CK tangente di essa curva nel punto C, l'inclinata

KC